

**nastavni materijal iz predmeta**

# **MATEMATIČKE METODE FIZIKE I**

autor: Leandra Vranješ Markić

Split, 20. lipnja 2009.

## SADRŽAJ:

VEKTORSKA ANALIZA .....	4
Gradijent.....	5
Parcijalne derivacije .....	5
Deriviranje vektora.....	10
Polja.....	11
Usmjerena derivacija i gradijent kao vektorski operator .....	11
Geometrijska interpretacija .....	15
Divergencija .....	17
Fizikalna interpretacija .....	18
Rotacija, $\nabla \times$ .....	21
Fizikalno značenje rotacije.....	23
Uzastopne primjene $\nabla$ .....	26
Vektorska integracija.....	29
Krivuljni integrali.....	29
Plošni integrali.....	31
Volumni integrali .....	32
Integralne definicije gradijenta, divergencije i rotacije.....	32
Gaussov teorem .....	34
Greenov teorem .....	35
Stokesov teorem .....	36
Konzervativne sile.....	38
Gaussov zakon.....	41
Poissonova jednadžba .....	43
Diracova delta funkcija .....	43
VEKTORSKA ANALIZA U ZAKRIVLJENIM KOORDINATNIM SUSTAVIMA I	
TENZORI.....	51
Pravokutne Cartesijeve koordinate.....	52
Kružne cilindrične koordinate.....	53
Integrali u cilindričnim koordinatama.....	56
Gradijent.....	60
Divergencija .....	60
Rotacija.....	61
Ortogonalne koordinate.....	63
Diferencijalni vektorski operatori .....	68
<i>Gradijent</i> .....	68
<i>Divergencija</i> .....	69
<i>Rotacija</i> .....	70
Sferne koordinate .....	71
Tenzorska analiza .....	76
Rotacija koordinatnih osi .....	76
Invarijantnost skalarnog produkta na rotacije .....	79
Kovarijantnost vektorskog produkta .....	80
Kovarijantnost gradijenta .....	81
Definicija tenzora ranga 2 .....	81
Zbrajanje i oduzimanje tenzora .....	85
Konvencija o sumiranju .....	85
Simetrija- Antisimetrija.....	86
Spinori .....	87

Kontrakcija .....	88
Direktni produkt .....	88
Kvocijentno pravilo.....	88
<b>ELEMENTI NUMERIČKOG RAČUNANJA .....</b>	<b>92</b>
Greške i nesigurnosti u numeričkom računanju .....	93
Ograničen opseg brojeva .....	93
Preciznost računala.....	95
Postupanje s greškama .....	96
Rješavanje sustava linearnih algebarskih jednažbi .....	103
Uvod .....	103
Nesingularni i singularni sustavi jednažbi .....	103
Gaussova eliminacija.....	106
Gauss-Jordanova eliminacija.....	107
LU dekompozicija .....	108
Interpolacija i ekstrapolacija. ....	112
Numeričko integriranje .....	120
Metoda 1: Trapezno pravilo .....	122
Metoda 2: Simpsonovo pravilo .....	122
Procjena greške .....	123
Višestruki integrali .....	125
Dodatak A .....	127
Dodatak B.....	136
Literatura .....	137

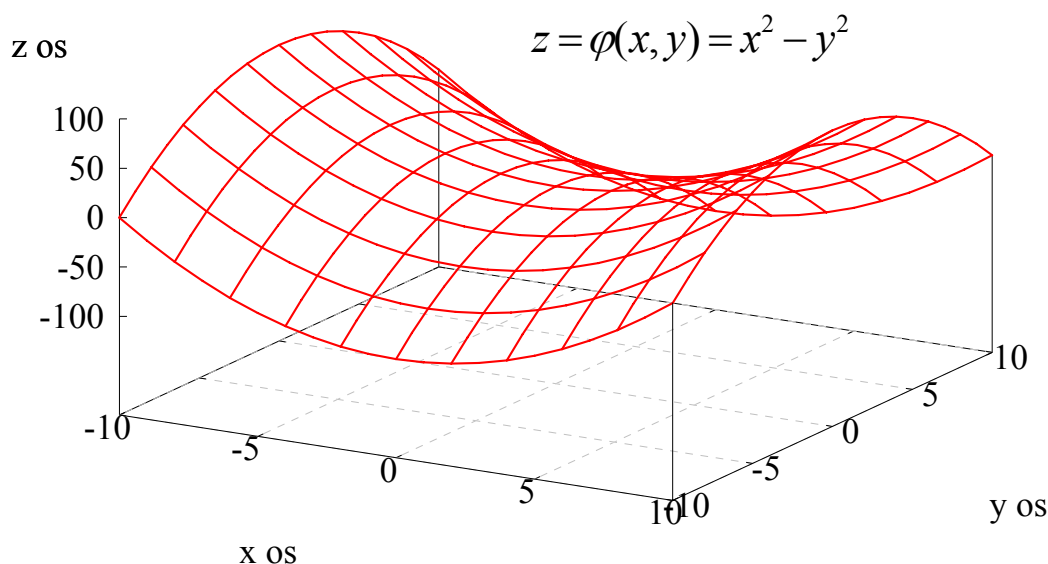
# VEKTORSKA ANALIZA

# Gradijent

## Parcijalne derivacije

Promotrit ćemo parcijalne derivacije funkcija više varijabli koje će nas odvesti do pojma usmjerene derivacije i operatora gradijenta, koji je od ključne važnosti u mehanici, elektrodinamici, ali i u drugim granama fizike.

Funkciju dviju varijabli  $z = \varphi(x, y)$  možemo geometrijski predočiti kao plohu iznad  $xy$ -ravnine u trodimenzionalnom Euklidskom prostoru. (za svaku točku  $(x, y)$  možemo pronaći  $z = \varphi(x, y)$ ). Nacrtajmo funkciju  $z = \varphi(x, y) = x^2 - y^2$ .



**Crt. 1** Funkcija dvije varijabli može se predočiti kao ploha u trodimenzionalnom prostoru

Za fiksni  $y$ ,  $z = \varphi(x, y) \equiv f(x)$  je samo funkcija od  $x$ , tj.  $f(x)$  je krivulja koja je presjek plohe  $z = \varphi(x, y)$  sa  $xz$ -ravninom koja prolazi kroz  $y$ . Izraz

$$\frac{df}{dx} \equiv \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+h, y) - \varphi(x, y)}{h} \quad (1.1)$$

je **parcijalna derivacija**  $\varphi$  po  $x$ , pod uvjetom da limes postoji. Analogno se definiraju i parcijalne derivacije po  $y$ . Izraz (1.1) naziva se ponekad u literaturi i nagib funkcije  $f(x)$ .

### Primjer 1

Neka je funkcija  $f(x, y) = x^3 y \sin(ay^2 x)$ . Odredite parcijalne derivacije po  $x$  i  $y$ .

Rješenje:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y \sin(ay^2 x) + ax^3 y^3 \cos(ay^2 x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 \sin(ay^2 x) + 2ax^3 y^2 \cos(ay^2 x)$$

Na isti se način definiraju i parcijalne derivacije funkcije tri i više varijabli. Za funkcije dvije varijable one su:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \varphi_{xx}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \varphi_{yy},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \varphi_{xy}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \varphi_{yx}.$$

Samo su tri od prethodne dvije relacije neovisne, jer u slučaju kad su druge parcijalne derivacije neprekidne u točki u kojoj računamo, prema Schwarzovom teoremu vrijedi

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}.$$

**Totalni diferencijal funkcije**  $F(x,y)$  definira se izrazom

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy \quad (1.2)$$

Sastoji se od neovisnih promjena u  $x$ - i  $y$ -smjeru. Dodavanjem i oduzimanjem  $F(x,y+\Delta y)$ ,  $\Delta F$  pišemo kao sumu dva porasta, jednog sasvim u  $x$ -smjeru, a drugog sasvim u  $y$ -smjeru.

$$\Delta F(x, y) \equiv F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) =$$

$$[F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y)] + [F(x, y + \Delta y) - F(x, y)] = \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y$$

U granici kada su  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  postaju diferencijalno mali  $\Delta F$  postaj  $dF$ . Teorem o srednjoj vrijednosti (vidi Ref. [5]) nam govori da su  $\partial F / \partial x$ ,  $\partial F / \partial y$  izračunati u nekoj točki  $\xi$ ,  $\eta$  između  $x$  i  $x+\Delta x$ ,  $y$  i  $y+\Delta y$ . Kako  $\Delta x \rightarrow 0$  i  $\Delta y \rightarrow 0$ ,  $\xi \rightarrow x$ , a  $\eta \rightarrow y$ .

Ovaj se rezultat generalizira i za više dimenzija, npr. za funkcije 3 varijable

$$\Delta \varphi(x, y, z) \equiv [\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \varphi(x, y + \Delta y, z + \Delta z)] +$$

$$[\varphi(x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \varphi(x, y, z + \Delta z)] +$$

$$[\varphi(x, y, z + \Delta z) - \varphi(x, y, z)] = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Delta z.$$

Oblik jednadžbe (1.2) sugerira interpretaciju totalnog diferencijala kao skalarnog produkta pomaka  $d\mathbf{r} = (dx, dy)$  i vektora čije su komponente parcijalne derivacije funkcije  $F$ .

### Primjer 2

Pronađite totalni diferencijal funkcije  $f(x, y) = x \exp(xy)$ .

Rješenje:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 e^{xy}$$

$$df = [e^{xy} + xye^{xy}] dx + x^2 e^{xy} dy$$

### Lančano pravilo

Promotrit ćemo slučaj kada su  $x$  i  $y$  funkcije neke druge varijable, npr.  $u$ . Ako želimo pronaći derivaciju  $df/du$ , možemo u izraz  $f(x, y)$  uvrstiti izraze za  $x(u)$  i  $y(u)$  pa funkciju koju dobijemo derivirati po  $u$ . U složenijim je slučajevima jednostavnije izraz za totalni diferencijal funkcije  $df$  (1.2) podijeliti sa  $du$

$$\frac{df}{du} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{du} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{du} \quad (1.3)$$

Izraz (1.3) primjer je lančanog pravila za funkciju dvije varijable, pri čemu svaka ovisi o jednoj varijabli. Posebno je podesan kad je neka jednadžba izražena u parametarskom obliku.

#### Primjer 3

Neka je  $x(u) = au^3$ ,  $y(u) = 1 + bu^2$ . Treba pronaći  $df/du$ , gdje je  $f(x, y) = xe^{-y}$ .

Rješenje.

$$\frac{df}{du} = e^{-y} 3au^2 - xe^{-y} 2bu$$

$$\frac{df}{du} = e^{-(1+bu^2)} 3au^2 - au^3 e^{-(1+bu^2)} 2bu$$

Ponekad je u tijeku nekog proračuna potrebno načiniti zamjenu varijabli te u skladu s tim u svim jednadžbama zamijeniti stari skup varijabli s novim. Ista se situacija događa kad funkcija  $f$  ovisi o jednom skupu varijabli  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , ali te varijable  $x_i$  ovise o drugom skupu varijabli  $u_j$  sukladno relacijama

$$x_i = x_i(u_1, u_2, \dots, u_m).$$

Za svaki  $i$ ,  $x_i$  će biti u principu različita funkcija od  $u_j$ . U tom slučaju lančano pravilo (1.3) postaje

$$\frac{\partial f}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial u_j}, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (1.4)$$

i predstavlja promjenu varijabli. Općenito, broj varijabli  $m$  i  $n$  ne mora biti jednak, ali ako su  $x_i$  i  $u_j$  skupovi neovisnih varijabli tada je  $m=n$ .

#### Primjer 4

Polarne koordinate  $\rho$  i  $\varphi$  te Cartesijeve koordinate  $x$  i  $y$  vezane su izrazima

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi \quad (1.5)$$

kao što je prikazano na Crt. 2. Proizvoljna funkcija  $f(x, y)$  može se napisati kao funkcija  $\rho$  i  $\varphi$ . Transformirajte izraz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

u polarne koordinate.

Rješenje:

Iz (1.4) slijedi

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (1.6)$$

Primijetimo da iz (1.5) slijedi  $\rho^2 = x^2 + y^2$ ,  $\varphi = \arctan(y/x)$ , odakle nalazimo

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{-(y/x^2)}{1 + (y/x)^2} = -\frac{\sin \varphi}{\rho},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \sin \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1/x}{1 + (y/x)^2} = \frac{\cos \varphi}{\rho}.$$

Izraz (1.6), nakon uvrštenja postaje

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

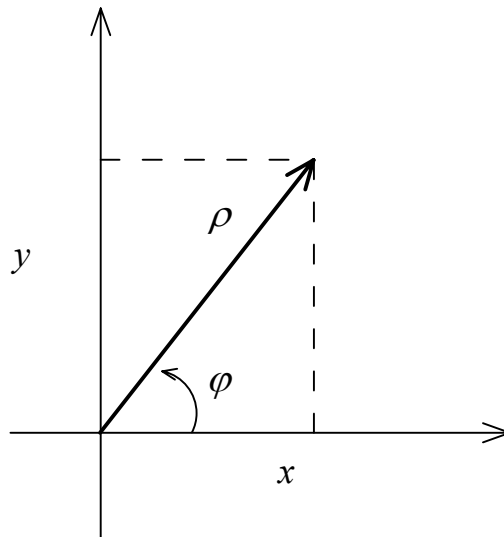
Sada samo treba raspisati druge derivacije

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) f$$

$$= \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) f$$

i srediti dobivene izraze. Kad se druge parcijalne derivacije zbroje treba na kraju dobiti

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$



**Crt. 2** Polarne i Cartesijeve koordinate

**Primjer 5**

Pronađite izraz za nagib implicitno zadane krivulje  $F(x,y)=0$ .

*Rješenje:*

U tom slučaju je i  $dF=0$  pa slijedi



$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Često moramo riješiti teže probleme koji uključuju pronalaženje nagiba uz neka ograničenja. Slijedeći primjer obrađuje tu tematiku.

### Primjer 6

#### Ekstrem uz ograničenje:

Pronađite koje su točke na krivulji  $G(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$  najmanje ili najviše udaljene od ishodišta.

*Rješenje:*

Kvadrat udaljenost od ishodišta dan je funkcijom  $F(x,y) = x^2 + y^2$ , a ograničenje je uvjet da točka  $(x,y)$  leži na elipsi koju definira funkcija  $G(x,y)$ . Dakle, tražimo rješenje

$$0 = \frac{dF(x,y(x))}{dx} = 2x + 2y \frac{dy}{dx}$$

Deriviranjem funkcije  $G$  dobijemo

$$2x + y + x \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y}{2y + x}$$

To uvrstimo u uvjet za min. ili max. udaljenosti,  $dF/dx=0$

Dobije se  $x(2y + x) = y(2x + y) \Rightarrow y = \pm x$

Isti se problem može elegantnije riješiti **metodom Lagrangeovih multiplikatora**

Treba naći minimum ili maksimum funkcije  $F(x,y)$  uz uvjet  $G(x,y)=0$ . Lagrangeovi multiplikatori nam pomažu da izbjegnemo direktno traženje  $x$  i  $y$  preko  $dF=0$  i  $dG=0$ , što zna biti komplicirano.

Koristimo funkciju  $F + \lambda G$  koja ima tri varijable  $x$ ,  $y$ ,  $\lambda$  i rješavamo

$$d(F + \lambda G) = \left( \frac{\partial F}{\partial x} + \lambda \frac{\partial G}{\partial x} \right) dx + \left( \frac{\partial F}{\partial y} + \lambda \frac{\partial G}{\partial y} \right) dy + \frac{\partial(F + \lambda G)}{\partial \lambda} d\lambda = 0$$

Izaberemo  $\lambda$  tako da je npr.

$\frac{\partial F}{\partial y} + \lambda \frac{\partial G}{\partial y} = 0$  i zatim eliminiramo zadnji član uvjetom  $G=0$  ( $F$  ne ovisi o  $\lambda$ ). Tako nam

ostane jednadžba  $\frac{\partial F}{\partial x} + \lambda \frac{\partial G}{\partial x} = 0$ . Uključujući ograničenje, to čini tri jednadžbe s tri nepoznanice.

Pogledajmo ovaj postupak na našem primjeru.

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \lambda \frac{\partial G}{\partial x} = 2x + \lambda(2x + y) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \lambda \frac{\partial G}{\partial y} = 2y + \lambda(2y + x) = 0$$

$$\Rightarrow y/x = -2(\lambda + 1)/\lambda \quad \text{tj. } y/x = -\lambda/2(\lambda + 1)$$

$$\text{tj. } y/x = \pm 1$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{2x}{2x + y} = \frac{-2}{3}, -2$$

### Deriviranje vektora

Neka je vektor  $\mathbf{A}$  dan izrazom  $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$ , gdje su  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  i  $\mathbf{k}$  jedinični vektori u Cartesijevom koordinatnom sustavu, a  $A_x$ ,  $A_y$  i  $A_z$  funkcije od  $t$ . Tada definiramo derivaciju  $d\mathbf{A}/dt$  jednadžbom

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{i} \frac{dA_x}{dt} + \mathbf{j} \frac{dA_y}{dt} + \mathbf{k} \frac{dA_z}{dt}.$$

Dakle, derivacija vektora  $\mathbf{A}$  je vektor čije su komponente derivacije komponenti od  $\mathbf{A}$ . Primijetimo da su jedinični vektori neovisni o varijabli deriviranja. U fizici susrećemo mnogo takvih primjera. Ako je  $\mathbf{r}$  vektor položaja čestice, tada je  $d\mathbf{r}/dt$  brzina  $\mathbf{v}$ , a  $d\mathbf{v}/dt$  akceleracija. Produkt skalara i vektora kao i skalarni i vektorski produkt vektora deriviraju se uobičajenim pravilima za deriviranje produkta uz napomenu da se u vektorskom produktu treba voditi računa o redoslijedu članova.

#### Primjer 7

Promotrimo jednoliko gibanje čestice po kružnici. Tada vrijedi

$$r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = \text{konst.}$$

$$v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \text{konst.}$$

Deriviranjem dvije prethodne relacije dobivamo

$$2\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0 \quad \text{ili} \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0,$$

$$2\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0 \quad \text{ili} \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 0,$$

Prva od prethodne dvije relacije znači da je  $\mathbf{r}$  okomit na  $\mathbf{v}$ , a druga da je  $\mathbf{a}$  okomit na  $\mathbf{v}$ . Iz navedenog slijedi da su  $\mathbf{a}$  i  $\mathbf{r}$  ili paralelni ili antiparalelni (jer se gibanje odvija u ravnini). To znači da je kut između  $\mathbf{a}$  i  $\mathbf{r}$   $0^\circ$  ili  $180^\circ$ . Ako izderiviramo  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0$  dobivamo

$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$  ili  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = -v^2$ . S druge strane po definiciji skalarnog produkta je

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{r}| |\mathbf{a}| \cos \theta = -v^2.$$

Stoga vidimo da je  $\cos \theta < 0$ , odnosno  $\theta = 180^\circ$ . Slijedi

$$|\mathbf{r}| |\mathbf{a}| (-1) = -v^2 \quad \text{odnosno} \quad a = \frac{v^2}{r}.$$

Upravo smo pomoću vektora dokazali da je za jednoliko gibanje po kružnici akceleracija usmjerena prema centru kružnice i ima iznos  $v^2/r$ .

## Polja

Mnoge fizikalne veličine imaju različite vrijednosti u različitim točkama prostora. Na primjer, temperatura u nekoj prostoriji nije jednaka u svim točkama: zimi je visoka kraj radijatora, niska pored otvorenog prozora, itd. Električno polje oko točkastog naboja veliko je pored naboja i smanjuje se kako se udaljujemo od naboja. Slično, gravitacijska sila koja djeluje na neki satelit ovisi o udaljenosti satelita od Zemlje. Brzina toka vode u nekom potoku velika je u uskim kanalima, a mala tamo gdje je potok širok. U svim ovim primjerima postoji neko područje prostora koje nam je osobito zanimljivo za problem koji rješavamo; u svakoj točki prostora neka fizikalna veličina ima svoju vrijednost. Izraz *polje* znači često i područje i vrijednost fizikalne veličine u tom području (npr. električno polje, gravitacijsko polje). Ako je fizikalna veličina koju promatramo skalar (npr. temperatura), tada govorimo o skalarnom polju. Ako je fizikalna veličina vektor (npr. električno polje, brzina, sila) tada govorimo o vektorskom polju.

Jednostavan primjer skalarnog polja je gravitacijska potencijalna energija blizu Zemlje,  $V = mgz$ , u svakoj točki visine  $z$  iznad neke referentne razine (za koju proizvoljno možemo uzeti da je jednaka  $(x, y)$  ravnini. Pretpostavimo da na nekom brijegu označimo niz krivulja od kojih svaka odgovara jednoj vrijednosti od  $z$ . Takve linije ili plohe na kojima je potencijalna energija konstantna nazivaju se ekvipotencijalnim linijama odnosno plohama. Horizontalne ravnine koje presijecaju brijeg po tim krivuljama su ekvipotencijalne plohe.

## Usmjerena derivacija i gradijent kao vektorski operator

Pretpostavimo da znamo temperaturu  $T(x, y, z)$  u svakoj točki prostorije ili npr. neke metalne šipke. Krećući od neke početne točke, možemo se pitati kolika je brzina promjene temperature s udaljenosti (u stupnjevima po centimetru) od te početne točke. Moguće je da će se temperatura smanjivati u nekim smjerovima i povećavati u drugim, kao i da će se u nekim smjerovima brže povećavati nego u drugim. Brzina promjene temperature ovisi o smjeru kojim se gibamo pa se iz tog razloga uvodi pojam usmjerene derivacije. Dakle, želimo pronaći graničnu vrijednost od  $\Delta T / \Delta s$ , gdje je  $\Delta s$  element udaljenosti u danom smjeru koji teži u nulu, a  $\Delta T$  odgovarajuća promjena u temperaturi. Usmjerena je derivacija dakle  $dT/ds$ . Mogli bismo također pitati i koji je smjer u kojem  $dT/ds$  ima najveću vrijednost; to je fizikalno smjer iz kojeg teče toplina (tj. energija se prenosi iz područja više u područje niže temperature, što je suprotan smjer od smjera maksimalnog porasta temperature).

Prije nego što krenemo računati usmjerene derivacije promotrit ćemo još jedan primjer. Pretpostavimo da stojimo na jednoj od strana brežuljka (ne na vrhu) i pitamo se u kojem smjeru u odnosu na točku gdje stojimo je nagib brežuljka prema dolje najstrmiji. To je smjer u kojem bismo počeli klizati u slučaju pada, a većina bi ljudi taj smjer nazvala „ravno dolje“. Da bismo bili precizniji, pretpostavimo da se pomaknemo za neku malu udaljenost  $\Delta s$  po brijegu. Vertikalna udaljenost za koju ćemo se pomaknuti  $\Delta z$  može biti pozitivna (ako smo se penjali uz brijeg), negativna (u slučaju spuštanja niz brijeg) ili nula (ako smo se pomaknuli horizontalno). Stoga  $\Delta z / \Delta s$  i njegov limes  $dz/ds$  ovisi o smjeru kojim se gibamo;  $dz/ds$  je usmjerena derivacija. Smjer najstrmijeg nagiba upravo je smjer u kojem  $dz/ds$  po apsolutnoj vrijednosti poprima maksimum. Primijetimo i da maksimiziranje  $dz/ds$  ujedno znači i maksimiziranje  $dV/ds$ , jer je gravitacijska potencijalna energija na brijegu dana izrazom  $V = mgz$ . Pritom su ekvipotencijalne linije dane izrazom  $V(x, y) = mgz(x, y) = \text{konst.}$

Vratimo se sada općem problemu pronalazjenja usmjerene derivacije. Neka je dano skalarno polje  $\phi(x, y, z)$ . Želimo pronaći  $d\phi/ds$  u danoj točki  $(x_0, y_0, z_0)$  i u danom smjeru. Uzmimo da je  $\mathbf{u} = \mathbf{i}a + \mathbf{j}b + \mathbf{k}c$  jedinični vektor u danom smjeru. Napisat ćemo jednadžbu pravca kroz točku  $(x_0, y_0, z_0)$  u smjeru  $\mathbf{u}$  u parametarskom obliku

$$x = x_0 + as$$

$$y = y_0 + bs$$

$$z = z_0 + cs$$

Parametar  $s$  ima geometrijsko značenje. To je duljina segmenta mjerena duž pravca. Udaljenost od točke  $(x_0, y_0, z_0)$  je

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = \sqrt{(as)^2 + (bs)^2 + (cs)^2} = s,$$

jer je  $\mathbf{u}$  jedinični vektor i  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ .

Iz jednadžbi pravca u parametarskom obliku vidimo da su duž pravca  $x$ ,  $y$  i  $z$  funkcije samo jedne varijable  $s$ . Stoga, ako uvrstimo  $x$ ,  $y$  i  $z$  u  $\phi(x, y, z)$ , tada je  $\phi$  funkcija samo jedne varijable, udaljenosti duž pravca koji prolazi kroz  $(x_0, y_0, z_0)$ . Budući da  $\phi$  ovisi samo o  $s$  možemo izračunati  $d\phi/ds$

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{ds} &= \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{dz}{ds} \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x} a + \frac{\partial\phi}{\partial y} b + \frac{\partial\phi}{\partial z} c. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Prethodni izraz podsjeća na skalarni produkt vektora  $\mathbf{u}$  s vektorom kojem su komponente parcijalne derivacije od  $\phi$ . Ovdje smo slijedili oznake iz reference [3]. Primijetimo da se u matematičkoj literaturi usmjerena derivacija često označava sa  $\partial f / \partial \mathbf{u}$ , gdje je jedinični vektor  $\mathbf{u}$  definiran na isti način te vrijedi desna strana izraza (1.7).

Prisjetimo se nadalje da i potpuni diferencijal  $dF(x, y)$  podsjeća na skalarni produkt pomaka  $d\mathbf{r} = (dx, dy)$  s vektorom  $(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y})$ , tj. promjena  $F$  ovisi o smjeru kojim prolazimo.

Poopćenjem izraza za totalni diferencijal (1.2) na tri dimenzije (3D) za promjenu skalarne funkcije  $\phi$ , dobivamo

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\phi}{\partial z} dz. \quad (1.8)$$

Promjena u položaju je  $d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{x}}dx + \hat{\mathbf{y}}dy + \hat{\mathbf{z}}dz$ . Ponovo vidimo da se 3D parcijalne derivacije mogu prepoznati kao vektor što vodi do pojma gradijenta. Vektorski operator nabra  $\nabla$  u Cartesijevom se koordinatnom sustavu definira izrazom

$$\nabla \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (1.9)$$

Kažemo da je nabra vektorski operator jer je operator koji kada derivira funkciju  $\phi$  daje vektor  $\nabla\phi$ .

Gradijent skalarnog polja  $\phi(x, y, z)$  definira se relacijom

$$\nabla\phi = \mathbf{i} \frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial\phi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial\phi}{\partial z} \quad (1.10)$$

$\nabla\phi$  je vektorsko polje čije su komponente parcijalne derivacije funkcije  $\phi(x, y, z)$  po  $x, y$  i  $z$ .

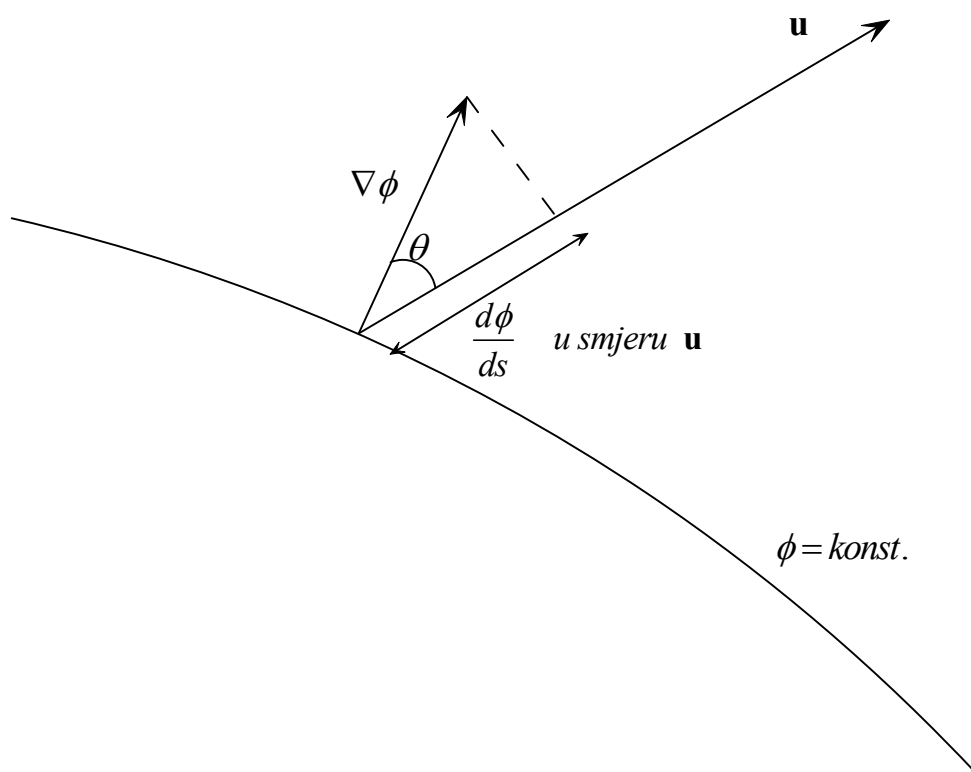
Gradijent neke funkcije ima korisno geometrijsko i fizikalno značenje koje ćemo sada promotriti. Napišimo sada usmjerenu derivaciju (1.7) kao skalarni produkt

$$\frac{d\phi}{ds} = \nabla\phi \cdot \mathbf{u}.$$

Korištenjem definicije skalarnog produkta i činjenice da je  $|\mathbf{u}|=1$ , imamo

$$\frac{d\phi}{ds} = |\nabla\phi| \cos\theta,$$

gdje je  $\theta$  kut između  $\mathbf{u}$  i vektora  $\nabla\phi$  (Crt. 3).



**Crt. 3** Gradijent i usmjerena derivacija

Vidimo kao prvo da je  $d\phi/ds$  projekcija  $\nabla\phi$  na smjer od  $\mathbf{u}$ . Stoga je  $|\nabla\phi| \geq d\phi/ds$  pa vidimo da je  $|\nabla\phi|$  najveća vrijednost koju usmjerena derivacija može poprimiti.

### Primjer 8

Pronađite usmjerenu derivaciju funkcije  $\phi = x^2y + xz$  u točki  $(1, 2, -1)$  u smjeru  $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ .

Jedinični vektor  $\mathbf{u}$  dobit ćemo ako podijelimo  $\mathbf{A}$  s  $|\mathbf{A}|$ . Tada imamo

$$\mathbf{u} = \frac{1}{3}(2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

Gradijent funkcije  $\phi$  dobivamo iz definicije

$$\nabla\phi = \mathbf{i} \frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial\phi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial\phi}{\partial z} = (2xy + z)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + x\mathbf{k}.$$

$\nabla\phi$  u točki  $(1, 2, -1)$  je  $3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ .

Tada je prema (1.7)

$$\frac{d\phi}{ds} \mathbf{u}(1,2,-1) = \nabla\phi \cdot \mathbf{u} = 2 - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}.$$

Vektorsko se polje  $\nabla\phi$  ne smije zamijeniti s vektorskim operatorom  $\phi\nabla$  koji ima komponente  $\left(\phi\frac{\partial}{\partial x}, \phi\frac{\partial}{\partial y}, \phi\frac{\partial}{\partial z}\right)$  i ima smisla samo kad djeluje na neku funkciju.

Gradijent skalarnog polja iznimno je važan u fizici (gravitacijska i električna polja) gdje izražava vezu između polja i potencijala, odnosno sile i potencijalne energije. Ako se neko polje  $\mathbf{E}$  može posvuda opisati jednom funkcijom  $V(\mathbf{r})$  tako da je  $\mathbf{E} = -\nabla V$ , odnosno simbolički,

$$\text{polje} = -\nabla(\text{potencijal}) \quad (1.11)$$

tada skalarnu funkciju  $V$  nazivamo njegovim potencijalom. Ekvivalentno, ako se neka sila može napisati kao negativni gradijent funkcije  $U$ , tada skalarnu funkciju  $U$  nazivamo potencijalnom energijom. Pošto je sila dana kao usmjerena derivacija potencijalne energije, potencijalnu energiju možemo pronaći, ako postoji, integriranjem sile duž pogodnog puta.<sup>1</sup>

Totalni je diferencijal potencijalne energije  $dU = \nabla U \cdot d\mathbf{r} = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  rad koji se vrši da bi se savladala sila  $\mathbf{F}$  na putu  $d\mathbf{r}$  pa fizikalno potencijalnu energiju (bolje rečeno razliku potencijalnih energija) prepoznamo kao rad i energiju. Štoviše, u sumi razlika potencijala međutočke se poništavaju tako da integrirani rad duž nekog puta od početne točke  $\mathbf{r}_i$  do konačne točke  $\mathbf{r}$  ovisi samo o razlici potencijalnih energija na krajnjim točkama puta

$$[V(\mathbf{r} + d\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}_2) - V(\mathbf{r} + d\mathbf{r}_1)] + [V(\mathbf{r} + d\mathbf{r}_1) - V(\mathbf{r})] = V(\mathbf{r} + d\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}_2) - V(\mathbf{r}).$$

Stoga je sila  $\mathbf{F}$  koja je dana preko potencijalne energije kao u relaciji (1.11) posebno jednostavna; naziva se **konzervativna**. U slučajevima kada postoji gubitak energije zbog trenja duž puta ili neke druge disipacije, rad će ovisiti o putu i takve sile se ne mogu zvati konzervativne. Za takve sile ne postoji potencijalna energija.

### Primjer 9

#### Gradijent funkcije od $r$

U fizici se često susrećemo s centralnim silama.

Stoga promotrimo prvo gradijent udaljenosti od ishodišta  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{\partial x} = \frac{x}{r}.$$

Slični izrazi vrijede i za parcijalne derivacije po  $y$  i po  $z$  pa dobivamo  $\nabla r = \mathbf{r}/r$ .

Zatim pogledajmo gradijent sferno simetričnog potencijala  $f(r)$  neke centralne sile t.d. je

$$\nabla f(r) = \mathbf{i} \frac{\partial f(r)}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f(r)}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial f(r)}{\partial z},$$

gdje je ovisnost  $f(r)$  o  $x$  dana preko ovisnosti  $r$  o  $x$ . Tada je

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(r)}{\partial x} &= \frac{df(r)}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \\ &= \frac{df(r)}{dr} \cdot \frac{x}{r} \end{aligned}$$

<sup>1</sup> U knjigama iz matematičkih metoda fizike (posebno npr. [1]) često se koristi izraz „potencijal“ i za potencijal i za potencijalnu energiju. Tako se vrlo često govori da je sila dana kao negativni gradijent potencijala.

Ovdje smo koristili poseban slučaj lančanog pravila generaliziranog na parcijalne derivacije:

$$\frac{\partial f(r, \theta, \varphi)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

gdje je  $\partial f / \partial \theta = \partial f / \partial \varphi = 0$ , a  $\partial f / \partial r \rightarrow df / dr$

Ispermutiramo koordinate ( $x \rightarrow y, y \rightarrow z, z \rightarrow x$ ) pa dobijemo parcijalne derivacije po  $y$  i  $z$ .

Konačno

$$\nabla f(r) = (\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z) \frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr} = \hat{\mathbf{r}} \frac{df}{dr}$$

gdje je  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r} / r$  jedinični vektor u pozitivnom radijalnom smjeru.

Gradijent funkcije  $f(r)$  je vektor u (+ ili -) radijalnom smjeru.

### Geometrijska interpretacija

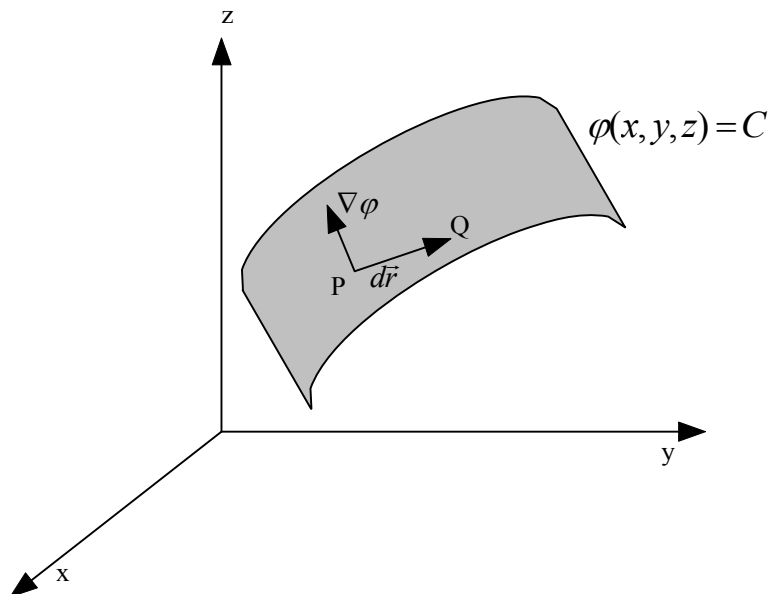
Promotrimo ravninu  $F(\mathbf{r}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - d = 0$ . Tada je  $\partial F / \partial x = n_x, \partial F / \partial y = n_y, \partial F / \partial z = n_z$ . Parcijalne derivacije funkcije  $F$  po  $x, y$  i  $z$  su dakle komponente vektora normale  $\mathbf{n}$  na ravninu  $F(\mathbf{r}) = 0$ .

Ovaj je primjer poseban slučaj općenitog geometrijskog značenja gradijenta implicitno definirane plohe  $\varphi(\mathbf{r}) = \text{konst.}$ . Neka su P i Q dvije točke na plohi  $\varphi(x, y, z) = C$ , gdje je  $C$  neka konstanta. Ako je  $\varphi$  potencijal tada je ta ploha **ekvipotencijalna ploha**. Točke su izabrane tako da je Q na udaljenosti  $d\mathbf{r}$  od P. Tada, idući od P do Q, promjena u  $\varphi(x, y, z)$

$$d\varphi = (\nabla \varphi) \cdot d\mathbf{r} = 0$$

mora biti 0 jer ostajemo na ekvipotencijalnoj plohi  $\varphi(x, y, z) = C$ . To pokazuje da je  $\nabla \varphi$  okomit na  $d\mathbf{r}$ . Pošto  $d\mathbf{r}$  može imati bilo kakav smjer u odnosu na točku P pod uvjetom da ostaje na plohi  $\varphi(\mathbf{r}) = \text{konst.}$ , (točka Q je samo ograničena uvjetom da se nalazi na toj plohi, a inače je proizvoljna) vidimo da je  $\nabla \varphi$  okomica na plohu  $\varphi(\mathbf{r}) = \text{konst.}$

Pokazali smo dakle da je smjer najbrže promjene neke funkcije  $\varphi$  okomit na ekvipotencijalne linije  $\varphi = \text{konst.}$  U problemu s temperaturom, na sličan je način smjer maksimalnog  $dT/ds$  okomit na izotermne linije. To je smjer gradijenta temperature  $\nabla T$ . U problemu s brežuljkom, smjer najstrmijeg nagiba u bilo kojoj točki okomit je na ekvipotencijalne linije te je usmjeren duž  $\nabla z$  ili  $\nabla V$ .

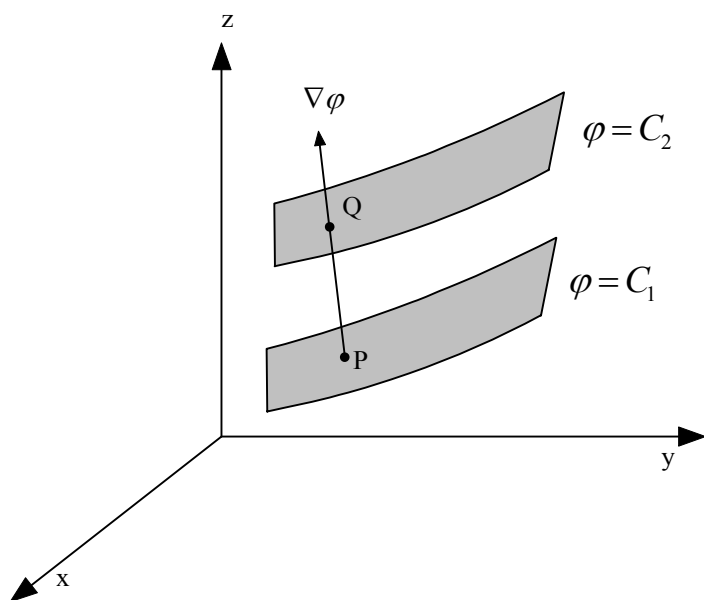


**Crt. 4**  $d\mathbf{r}$  može imati bilo kakav smjer u odnosu na točku P pod uvjetom da ostaje na  $\varphi(x,y,z)=C$ .

Ako sada dozvolimo da nas  $d\mathbf{r}$  odvede od jedne plohe,  $\varphi=C_1$  do druge,  $\varphi=C_2$  imamo

$$d\varphi = C_2 - C_1 = \Delta C = (\nabla \varphi) \cdot d\mathbf{r}$$

Za dani  $d\varphi$ ,  $|d\mathbf{r}|$  je minimalan kada je izabran paralelno s  $\nabla\varphi$  ( $\cos\theta=1$ ); ako je pak zadan  $|d\mathbf{r}|$  promjena u skalarnoj funkciji  $\varphi$  je maksimalna kada izaberemo da je  $d\mathbf{r}$  paralelan sa  $\nabla\varphi$ . Ovo znači da je  $\nabla\varphi$  vektor koji ima smjer najbrže prostorne promjene  $\varphi$ .



**Crt. 5** Gradijent  $\nabla\varphi$  je vektor koji ima smjer najbrže prostorne promjene funkcije  $\varphi$ .



## Divergencija

U prethodnoj smo cjelini definirali nablu  $\nabla$  kao vektorski operator. Sada ćemo djelovati s tim operatorom na drugi vektor, vodeći pritom računa i o vektorskim i o diferencijalnim osobinama  $\nabla$ . Promotrimo prvo skalarni produkt  $\nabla$  s drugim vektorom  $\mathbf{V}$ . Izraz,

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (1.12)$$

nazivamo divergencija od  $\mathbf{V}$ . Divergencija vektorskog polja je skalarno polje.

### Primjer 10

Pronađite divergenciju vektorskog polja

$$\mathbf{V} = x^2 y^3 \hat{\mathbf{x}} + y^2 z^3 \hat{\mathbf{y}} + z^2 x^3 \hat{\mathbf{z}}.$$

Rješenje:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 2xy^3 + 2yz^3 + 2zx^3.$$

### Primjer 11

#### Divergencija centralnog polja sila

Promotrimo prvo divergenciju vektora položaja  $\mathbf{r}$ .

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

Gravitacijska (ili električna) sila u slučaju kada se jedna masa (naboj) nalazi u ishodištu proporcionalna je s vektorom položaja  $\mathbf{r}$  s radijalnom  $1/r^3$  ovisnošću pa stoga razmatramo općenitiji slučaj divergencije centralnog polja sila

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{r}f(r)) &= \frac{\partial}{\partial x} [xf(r)] + \frac{\partial}{\partial y} [yf(r)] + \frac{\partial}{\partial z} [zf(r)] = \\ &= f(r)\nabla \cdot \mathbf{r} + x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} \\ &= 3f(r) + x \frac{x}{r} \frac{df}{dr} + y \frac{y}{r} \frac{df}{dr} + z \frac{z}{r} \frac{df}{dr} = 3f(r) + r \frac{df}{dr} \end{aligned}$$

Posebno, za  $f(r) = r^{n-1}$  dobivamo

$$\nabla \cdot (\mathbf{r}r^{n-1}) = \nabla \cdot (\hat{\mathbf{r}}r^n) = 3r^{n-1} + (n-1)r^{n-1} = (n+2)r^{n-1} \quad (1.13)$$

Ova divergencija iščezava za  $n = -2$  osim za  $r = 0$  (tada je  $\hat{\mathbf{r}}/r^2$  singularno). Prethodno razmatranje je relevantno za Coulombov potencijal

$$V(r) = A_0 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

s električnim poljem

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \frac{q\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Korištenjem relacije (1.13) dobivamo da je  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  (osim u ishodištu, gdje derivacije nisu definirane)

Kombinacija  $\nabla \cdot (f\mathbf{V})$ , u kojoj je  $f$  skalarna funkcija, a  $\mathbf{V}$  vektorska funkcija, može se napisati kao

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (f\mathbf{V}) &= \frac{\partial}{\partial x}(fV_x) + \frac{\partial}{\partial y}(fV_y) + \frac{\partial}{\partial z}(fV_z) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}V_x + f\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}V_y + f\frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}V_z + f\frac{\partial V_z}{\partial z} \\ &= (\nabla f) \cdot \mathbf{V} + f\nabla \cdot \mathbf{V}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

a to je upravo ono što bismo očekivali od derivacije produkta. Uočite da je  $\nabla$  diferencijalni operator koji derivira i  $f$  i  $\mathbf{V}$ ; kao vektor se skalarno množi sa  $\mathbf{V}$  u svakom izrazu.

### Fizikalna interpretacija

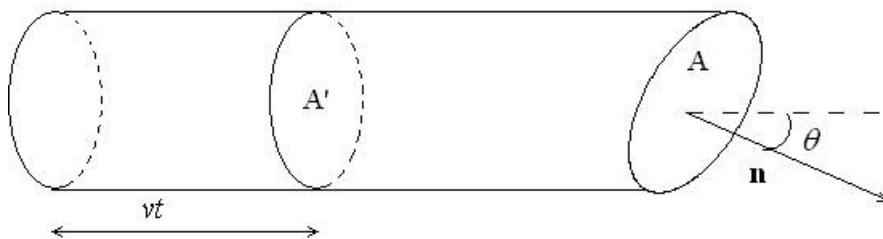
Da bismo razvili fizikalnu interpretaciju divergencije promotrit ćemo područje kojim teče voda. U svakoj točki prostora možemo nacrtati vektor  $\mathbf{v}$  koji je jednak brzini „čestice“ vode u toj točki. Vektorska funkcija  $\mathbf{v}(x,y,z)$  tada predstavlja vektorsko polje. Krivulje koje su tangente brzine  $\mathbf{v}$  nazivamo strujnicama. Na isti način možemo razmotriti i tok nekog plina, električne struje, topline ili čestica iz nekog radioaktivnog izvora. Pokazat ćemo da ako  $\mathbf{v}$  predstavlja brzinu protjecanja bilo koje od navedenih stvari, tada se divergencija  $\mathbf{v}$  može povezati s količinom tvari koja istječe ili utječe u taj volumen. Ta veličina može biti različita od nule zato što postoji promjena gustoće (više zraka izlazi iz prostorije nego što ulazi u nju jer se prostorija grije) ili zato što postoje izvori ili ponori u volumenu (alfa-čestice izlaze iz radioaktivnog izvora, ali ne ulaze u njega). Ista se matematika primjenjuje i na električna i magnetska polja.

U našem primjeru protjecanja vode promotrit ćemo izraz  $\nabla \cdot (\rho\mathbf{v})$  gdje je  $\rho(x,y,z)$  je gustoća fluida u točki  $(x,y,z)$ . Količina vode koja u vremenu  $t$  proteče kroz plohu  $A'$  koja je okomita na smjer toka jednaka je (Crt. 6) količini vode (masi) u cilindru poprečnog presjeka  $A'$  i duljine  $vt$ . Ta je količina vode

$$(vt)(A')(\rho).$$

Ista količina vode prođe i kroz plohu  $A$  čiji vektor normale  $\mathbf{n}$  čini kut  $\theta$  s brzinom  $\mathbf{v}$  (Crt. 6). Budući je  $A' = A \cos \theta$ , to je

$$vtA'\rho = vt\rho A \cos \theta.$$



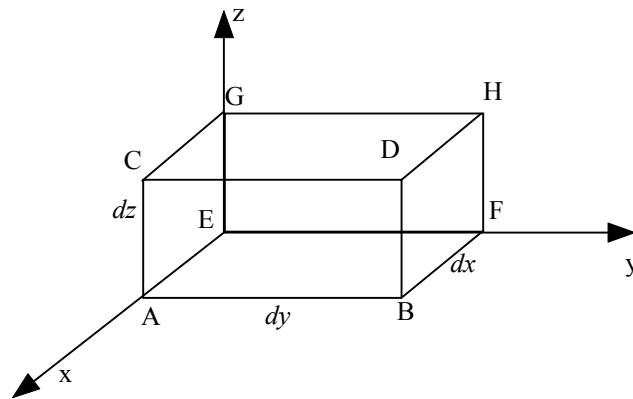
Crt. 6 Tok vode kroz cilindar

Dakle, ako voda teče u smjeru  $\mathbf{v}$  koji čini kut  $\theta$  s normalom  $\mathbf{n}$  na neku površinu, tada je količina vode koja proteče kroz jediničnu površinu u jediničnom vremenu jednaka

$$v\rho \cos \theta = \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n},$$

gdje je  $\mathbf{n}$  jedinični vektor.

Promotrimo sada mali volumen  $dx dy dz$  (Crt. 7), koji se nalazi u području kroz koji teče voda. Voda teče u ili iz volumena  $dx dy dz$  kroz svaku od šest stranica, a mi ćemo proračunati rezultatni tok prema vani. Tok fluida, odnosno količina fluida koji utječe u volumen u jedinici vremena, (u pozitivnom  $x$  smjeru) kroz stranicu EFGH  $= \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \rho v_x|_{x=0} dy dz$ .  $\rho v_x$  je komponenta toka koja je okomita na tu stranicu, a  $dy dz$  je površina stranice. Komponente toka  $\rho v_y$  i  $\rho v_z$  koje su tangencijalne na ovu stranicu ne doprinose toku kroz ovu stranicu. Tok fluida koji istječe (u  $+x$  smjeru) kroz stranicu ABDC  $= \rho v_x|_{x=dx} dy dz$ .



Crt. 7 Diferencijalni paralelepiped

Da bismo usporedili ova dva toka i pronašli rezultatni tok prema vani razvijemo tok prema vani u Maclaurinov red oko  $x=0$

$$(\text{tok prema vani})_{ABCD} = \rho v_x|_{x=dx} dy dz$$

$$= \left[ \rho v_x + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) dx \right]_{x=0} dy dz \quad (1.15)$$

i zatim od njega oduzmemo tok prema unutra kroz EFGH.

Ovdje izraz s derivacijom predstavlja prvu korekciju koja uzima u obzir moguću nejednolikost gustoće ili brzine.

Prisjetimo se, Maclaurinov red za funkcije jedne varijable dan je sa

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0).$$

U relaciji (1.15)  $x$  je zamijenjen sa  $dx$ , uz korištenje parcijalnih derivacija.

$$\text{Dakle, rezultatni tok prema vani}|_x = \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) dx dy dz$$

Do ovog smo rezultata mogli doći i na sljedeći način

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\rho v_x(\Delta x, 0, 0) - \rho v_x(0, 0, 0)}{\Delta x} \equiv \left. \frac{\partial [\rho v_x(x, y, z)]}{\partial x} \right|_{(0,0,0)}$$

Prethodni rezultat, izveden za dvije stranice koje su okomite na  $x$ -os, mora vrijediti i za dvije stranice koje su okomite na  $y$ -os. Tada  $x$  zamijenimo sa  $y$ ,  $y$  sa  $z$  i  $z$  sa  $x$ . Ovo je ciklička permutacija koordinata. Ako još jednom primijenimo cikličku permutaciju koordinata dobijemo i rezultat za preostale dvije stranice paralelepipeda. Zbrajajući rezultatne tokove za sva tri para površina našeg volumnog elementa, dobijemo rezultatni tok prema vani (u jediničnom vremenu) =

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) \right] dx dy dz$$

$$= \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dx dy dz$$

Dakle, rezultatni tok vode iz volumnog elementa  $dx dy dz$  po jediničnom vremenu po jedinici volumena je divergencija  $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$ . Divergencija se uvijek računa u nekoj točki (u našem izvodu uzimamo limes kad volumen  $dx dy dz^2$  teži u nulu) i može imati različite vrijednosti u različitim točkama prostora.

Direktna je primjena **jednadžba kontinuiteta**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

koja kaže da rezultatni tok različit od nule vodi na promjenu gustoće unutar volumena. Primijetimo da se u prethodnoj jednadžbi smatra da je  $\rho$  funkcija prostora i vremena,  $\rho = \rho(x, y, z, t)$ . Jednadžba kontinuiteta je lokalni oblik zakona očuvanja mase/naboja. Naime,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3r \rho + \oint_S d\sigma \cdot \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

Divergencija se pojavljuje u širokoj lepezi fizikalnih problema, primjerice struja gustoće vjerojatnosti u kvantnoj fizici, curenja neutrona u nuklearnim reaktorima i tako dalje.

$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})$  je gustoća izvora (ponora) vektorskog polja  $\mathbf{F}$  u točki  $\mathbf{r}$ . Ako imamo poseban slučaj kada divergencija nekog vektora iščezava, na primjer,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.16)$$

tada se kaže da je vektor  $\mathbf{B}$  solenoidalan. Izraz solenoidalan potječe iz elektromagnetizma gdje je  $\mathbf{B}$  magnetska indukcija, a relacija (1.16) je jedna od Maxwellovih jednadžbi. Ona ujedno znači da ne postoje magnetski naboji. Naime, u slučaju električnog polja  $\mathbf{E}$  vrijedi Maxwellova jednadžba

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0, \quad (1.17)$$

gdje je  $\rho$  gustoća naboja. Naboji predstavljaju 'izvore' i 'ponore' električnog polja.

## SAŽETAK

Gledano formalno, divergencija vektorskog polja se konstruira kao skalarni produkt operatora nable  $\nabla$  s vektorskim poljem. Ona lokalno mjeri prostornu promjenu vektorskog polja. U tom smislu jednadžba kontinuiteta sadrži bit divergencije: vremensku promjenu gustoće u malom dijelu prostora uravnotežava prostorno otjecanje ili dotjecanje gustoće struje.

<sup>2</sup> Ovdje smo koristili za mali volumen oznaku  $dx dy dz$  kao što se koristi u referenci [1]. Češće je korištenje oznaka  $\Delta x \Delta y \Delta z$ .

## Rotacija, $\nabla \times$

Druga moguća primjena operatora  $\nabla$  je u vektorskom produktu s drugim vektorom; izraz  $\nabla \times \mathbf{V}$  naziva se rotacija. Dakle, djelovanjem  $\nabla$  na neki vektor  $\mathbf{V}$  dobijemo

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{V} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \left( \frac{\partial}{\partial y} V_z - \frac{\partial}{\partial z} V_y \right) + \mathbf{j} \left( \frac{\partial}{\partial z} V_x - \frac{\partial}{\partial x} V_z \right) + \mathbf{k} \left( \frac{\partial}{\partial x} V_y - \frac{\partial}{\partial y} V_x \right) \end{aligned} \quad (1.18)$$

U razvijanju determinante treba voditi računa o vektorskoj prirodi  $\nabla$ . Posebno, izraz  $\mathbf{V} \times \nabla$  je besmislen, osim u slučaju kada, kao cjelina, djeluje na funkciju ili vektor. Dakle, u slučaju relacije (1.18) determinantu treba razvijati odozgo prema dolje.

### Primjer 12

Pronađite rotaciju vektorskog polja

$$\mathbf{V} = x^2 y^3 \mathbf{i} + y^2 z^3 x \mathbf{j} + z^2 x^3 \mathbf{k}$$

Rješenje:

Iz definicije (1.18) slijedi:

$$\nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 y^3 & y^2 z^3 x & z^2 x^3 \end{vmatrix} = -3y^2 z^2 x \mathbf{i} - 3z^2 x^2 \mathbf{j} + (y^2 z^3 - 3x^2 y^2) \mathbf{k}$$

Ako sa  $\nabla \times$  djelujemo na produkt skalara i vektora dobijemo

$$\begin{aligned} \nabla \times (f\mathbf{V})|_x &= \left[ \frac{\partial}{\partial y} (fV_z) - \frac{\partial}{\partial z} (fV_y) \right] = \\ &= \left( f \frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} V_z - f \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z} V_y \right) = \\ &= f \nabla \times \mathbf{V}|_x + (\nabla f) \times \mathbf{V}|_x \end{aligned}$$

Ako permutiramo koordinate  $x \rightarrow y, y \rightarrow z, z \rightarrow x$  da bismo dobili  $y$ -komponentu, a zatim permutiramo koordinate još jednom da bismo dobili  $z$ -komponentu, na kraju dobijemo

$$\nabla \times (f\mathbf{V}) = f \nabla \times \mathbf{V} + (\nabla f) \times \mathbf{V}.$$

Prisjetimo se da smo analogni izraz dobili i u slučaju divergencije (1.14).

### Primjer 13

#### Vektorski potencijal konstantnog magnetskog polja

Iz elektrodinamike znamo da je  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ . Iz ove jednadžbe slijedi da se  $\mathbf{B}$  može napisati kao  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , gdje je  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  vektorski potencijal. Naime,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) = \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} \right) V_x + \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \right) V_y + \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right) V_z \quad (1.19) \\ &= (\nabla \times \nabla) \cdot \mathbf{A} \equiv 0. \end{aligned}$$

Izraz (1.19) se neće promijeniti ako vektorskom potencijalu dodamo gradijent skalarne funkcije iz čega slijedi da vektorski potencijal nije jednoznačan.

Želimo pokazati da je u slučaju konstantnog magnetskog polja vektorski potencijal dan

$$\text{izrazom } \mathbf{A} = \frac{1}{2} (\mathbf{B} \times \mathbf{r}).$$

$$2\nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{r}) = (\nabla \cdot \mathbf{r})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{r} + \mathbf{r}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{B} = 3\mathbf{B} - \mathbf{B} + 0 + 0 = 2\mathbf{B}.$$

Poredak članova u drugom pribrojniku prethodnog izraza ukazuje da gradijent još uvijek djeluje na vektor položaja. U izvodu je korišteno BAC-CAB pravilo za dvostruki vektorski produkt:

$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} - \mathbf{C} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  To pravilo raspisano za slučaj kada je prvi operator nabla je:  
 $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}.$

### Primjer 14

#### Rotacija centralne sile

Uočimo najprije da je rotacija vektora položaja jednaka nuli,

$$\nabla \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

Algebarski gledano, to je posljedica nezavisnosti svake Cartesijeve koordinate o druge dvije. Sada možemo izračunati rotaciju centralne sile  $\nabla \times \mathbf{r} f(r)$ , gdje očekujemo 0 iz istog razloga.

$$\nabla \times \mathbf{r} f(r) = f(r) \nabla \times \mathbf{r} + [\nabla f(r)] \times \mathbf{r}.$$

Korištenjem  $\nabla f(r) = \hat{\mathbf{r}} (df/dr)$ , dobivamo

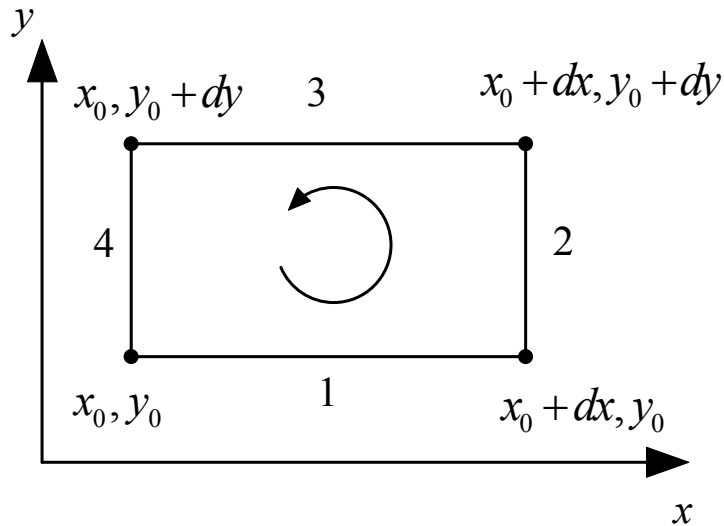
$$\nabla \times \mathbf{r} f(r) = \frac{df}{dr} \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{r} = 0.$$

Vektorski produkt iščezava jer imamo dva paralelna vektora.

## Fizikalno značenje rotacije

Promotrimo cirkulaciju fluida oko diferencijalne petlje u  $xy$  ravnini (Crt. 8).

Cirkulacija vektora općenito je dana s vektorskim krivuljnim integralom  $\oint \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\lambda}$  duž zatvorene konture.



Crt. 8 Cirkulacija oko diferencijalne petlje

U općem slučaju pravokutnika, sličnog našem (Crt. 8 Cirkulacija oko diferencijalne petlje) to je

$$\begin{aligned} \text{Cirkulacija}_{1234} &= \int_1 V_x(x, y) d\lambda_x + \int_2 V_y(x, y) d\lambda_y \\ &\quad + \int_3 V_x(x, y) d\lambda_x + \int_4 V_y(x, y) d\lambda_y \end{aligned}$$

Kako je zbog smjera obilaženja, na Crt. 8<sup>3</sup>,

$$d\lambda_x = \begin{cases} dx & \text{na liniji 1} \\ -dx & \text{na liniji 3} \end{cases}$$

te

$$d\lambda_y = \begin{cases} dy & \text{na liniji 2} \\ -dy & \text{na liniji 4} \end{cases}$$

a naš je pravokutnik diferencijalan, to je

$$\begin{aligned} \text{Cirkulacija}_{1234} &= V_x(x_0, y_0)dx + V_y(x_0 + dx, y_0)dy \\ &\quad + V_x(x_0, y_0 + dy)(-dx) + V_y(x_0, y_0)(-dy). \end{aligned}$$

<sup>3</sup> Slijedimo oznake iz reference [1]. U mnogim udžbenicima umjesto  $dx$  i  $dy$  kreće se s pravokutnikom kojem su stranice  $\Delta x$  i  $\Delta y$  te se uzima granica kada  $\Delta x \rightarrow 0$  i  $\Delta y \rightarrow 0$ .

Sve funkcije izrazit ćemo preko vrijednosti u točki  $(x_0, y_0)$  koristeći se Taylorovim razvojem oko točke  $(x_0, y_0)$ , u kojem zadržavamo prva dva člana, jer su  $dx$  i  $dy$  diferencijalno mali:

$$V_x(x_0, y_0 + dy) = V_x(x_0, y_0) + \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} \right)_{x_0, y_0} dy$$

$$V_y(x_0 + dx, y_0) = V_y(x_0, y_0) + \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} \right)_{x_0, y_0} dx$$

Dakle:

$$\begin{aligned} \text{Cirkulacija}_{1234} &= V_x(x_0, y_0)dx + \left[ V_y(x_0, y_0) + \frac{\partial V_y}{\partial x} dx \right] dy \\ &+ \left[ V_x(x_0, y_0) + \frac{\partial V_x}{\partial y} dy \right] (-dx) + V_y(x_0, y_0)(-dy) \\ &= \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

Dijeljenjem s  $dx dy$  dobivamo

$$\text{Cirkulacija po jediničnoj površini} = \nabla \times \mathbf{V} \Big|_z.$$

Ovo je infinitezimalni slučaj Stokesovog teorema kojeg ćemo obrađivati u jednom od sljedećih poglavlja. Cirkulacija (u dinamici fluida koristi se naziv vrtložnost) oko diferencijalne površine u  $xy$  ravnini je dana sa  $z$ -komponentom od  $\nabla \times \mathbf{V}$ . Mogli smo izabrati koordinatni sustav tako da bilo koji dani vektor  $\mathbf{n}$  (vektor normale na plohu) bude u smjeru  $z$ -osi, pa je tako cirkulacija općenito jednaka  $(\nabla \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} d\sigma$ .

U principu, rotacija  $\nabla \times \mathbf{V}$  u točki  $(x_0, y_0)$  mogla bi se odrediti tako da se postavi mali (diferencijalni) kotačić s lopaticama (kao kod parobroda) u fluid koji se giba. Rotacija malog kotačića bila bi mjera rotacije  $\nabla \times \mathbf{V}$ , pri čemu bi os vrtnje kotačića bila usmjerena u smjeru od  $\nabla \times \mathbf{V}$ , koji je okomit na ravninu cirkulacije.

### Zadatak 1: **Kruta rotacija kao izvor vrtložnosti**

Promotrite polje brzine koje opisuje krutu rotaciju kutnom brzinom  $\Omega$ , pri čemu je  $z$ -os os rotacije. Tada je brzina dana izrazom  $\mathbf{v} = \hat{\phi} \Omega \rho$ ;  $\hat{\phi} = -\mathbf{i}y / \rho + \mathbf{j}x / \rho$ ,  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Pokažite da je za ovo polje brzine  $\nabla \times \mathbf{v} = 2\Omega \mathbf{k}$ .

Ovo znači da je vrtložnost jednaka dvostrukoj kutnoj brzini. Na Crt. 9 prikazan je kotačić koji je postavljen u polje toka koje je povezano uz krutu rotaciju. Kotačić se miče s tokom i napravi jedan okret oko svoje osi u vremenu  $2\pi/\Omega$ . Pritom se kotačić okreće u obrnutom smjeru od kazaljke na satu, a rotacija vektora brzine je usmjerena u smjeru  $+z$  osi. To nam potvrđuje da rotacija kotačića pokazuje ne samo da je  $\nabla \times \mathbf{v}$  različita od nule, već je i os rotacije kotačića usmjerena duž smjera  $\nabla \times \mathbf{v}$ . U složenijem slučaju, kao što je tok nekog fluida, vrijednost rotacije u nekoj točki je mjera kutne brzine fluida u okolini te točke.





S obzirom na povezanost rotacije vektora s konceptom cirkulacije, možemo intuitivno razumjeti iščezavanje rotacije centralne sile. Naime,  $\mathbf{r}$  'teče' radijalno od ishodišta prema vani bez rotiranja, i bilo koja skalarna funkcija  $f(r)$  koja ga množi ne mijenja tu situaciju. Stoga kada je

$$\nabla \times \mathbf{V} = 0$$

vektor  $\mathbf{V}$  se naziva irrotacioni vektor. Najvažniji fizikalni primjeri irrotacionih vektora su gravitacijska i elektrostatska sila. U oba slučaja,

$$\mathbf{V} = C \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = C \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (1.20)$$

gdje je  $C$  konstanta, a  $\hat{\mathbf{r}}$  jedinični vektor u radijalnom smjeru prema vani. U slučaju gravitacijske sile  $C = -Gm_1m_2$ , po Newtonovom zakonu opće gravitacije. Kada je  $C = q_1q_2/(4\pi\epsilon_0)$ , imamo Coulombov zakon. Irrotaciono svojstvo sile  $\mathbf{V}$  koja je dana relacijom (1.20) može se pokazati i direktnim razvojem u Cartezijeve komponente.

Može se pokazati da se svako vektorsko polje može razbiti na irrotacioni dio i solenoidalni dio (uz uvjete u beskonačnosti).

Za valove u elastičnom mediju, ako je pomak  $\mathbf{u}$  irrotacion,  $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ , ravni valovi (ili kuglasti valovi na velikim udaljenostima) postaju longitudinalni. Ako je  $\mathbf{u}$  solenoidaln,  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , valovi postaju transverzalni. Seizmički poremećaj će stvoriti pomak koji se može prikazati preko solenoidalnog i irrotacionog dijela. Irrotacioni dio daje longitudinalne P (primarne) potresne valove. Solenoidalni dio daje sporije transverzalne S (sekundarne) valove.

Korištenjem gradijenta, divergencije i rotacije te BAC-CAB pravila, možemo iskonstruirati veliki broj korisnih vektorskih identiteta. Za provjeru, uvijek se može načiniti razvoj u Cartezijeve komponente.

## Uzastopne primjene $\nabla$

Proučit ćemo djelovanje operatora  $\nabla$  na gradijent, divergenciju i rotaciju:

- (a)  $\nabla \cdot \nabla \phi$       (b)  $\nabla \times \nabla \phi$       (c)  $\nabla \nabla \cdot \mathbf{V}$   
 (d)  $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{V}$       (e)  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V})$ .

Svih pet izraza uključuje druge derivacije i pojavljuju se u diferencijalnim jednadžbama drugog reda u teorijskoj fizici, osobito u elektromagnetizmu.

Prvi izraz,  $\nabla \cdot \nabla \phi$ , divergencija gradijenta, nazivamo Laplacijan od  $\phi$ . Imamo,

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left( \mathbf{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (1.21)$$

Kada je  $\phi$  elektrostatski potencijal, u području bez naboja vrijedi

$$\nabla \cdot \nabla \phi = 0 \quad (1.22)$$

To je Laplaceova jednadžba elektrostatičke. Često se kombinacija  $\nabla \cdot \nabla$  piše  $\nabla^2$ , ili  $\Delta$ .

### Primjer 15

#### Laplacijan radijalne koordinate

Izračunajte  $\nabla \cdot \nabla g(r)$ .

Rješenje:

$$\nabla \cdot \nabla g(r) = \nabla \cdot \hat{\mathbf{r}} \frac{dg}{dr} = \frac{2}{r} \frac{dg}{dr} + \frac{d^2 g}{dr^2}$$

Ako je  $g(r)=r^n$  dobivamo  $\nabla \cdot \nabla r^n = n(n+1)r^{n-2}$ . Ova relacija iščezava kada je  $n=0$  ( $g(r)=\text{konstanta}$ ) i za  $n=-1$ ; to znači da je  $g(r)=1/r$  rješenje Laplaceove jednačbe,  $\nabla^2 g(r)=0$ . Ovo je za  $r \neq 0$ . U ishodištu postoji singularitet.

Izraz (b) može se napisati kao:

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \varphi &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{i} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} \right) + \mathbf{j} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \right) + \mathbf{k} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.23)$$

pod uvjetom da se redosljed parcijalnih derivacija može zamijeniti. To je moguće kad god su druge parcijalne derivacije od  $\varphi$  neprekidne funkcije. Tada je rotacija gradijenta jednaka nuli. Dakle su svi gradijenti irrotacioni. Nula u relaciji (1.23) je posljedica matematike, a nula u relaciji (1.22) posljedica fizike.

Izraz (d) je mješoviti skalarni produkt koji se može napisati kao:

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = 0$$

gdje smo ponovno pretpostavili da je redosljed parcijalnih derivacija nebitan.

Jedan od najvažnijih slučajeva iščezavanja divergencije vektora je  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , gdje je  $\mathbf{B}$  magnetska indukcija (to je ujedno i jedna od Maxwellovih jednačbi). Kada je vektor solenoidalan on se može napisati kao rotacija drugog vektora  $\nabla \times \mathbf{A}$ .

Dva preostala izraza zadovoljavaju relaciju:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{V} \quad (1.24)$$

Ova dekompozicija Laplacijana  $\nabla \cdot \nabla$  u longitudinalni dio (gradijent) i transverzalni dio (rotaciju) slijedi iz BAC-CAB relacije koju smo napisali tako da se  $\mathbf{C}$  u svakom izrazu pojavljuje na krajnjem desnom mjestu. Izraz (1.24) možemo smatrati definicijom  $(\nabla \cdot \nabla)\mathbf{V}$ . To je Laplacijan (skalarni operator) koji djeluje na vektor, tako da je konačni rezultat vektor s tri komponente u trodimenzionalnom prostoru.

**Primjer: Elektromagnetska valna jednadžba**

Važnu primjenu vektorske relacije (1.24) nalazimo u izvodu jednadžbe za elektromagnetske valove. Krećemo od Maxwellovih jednadžbi u vakuumu:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{1.25}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{1.26}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{1.27}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{1.28}$$

gdje je  $\mathbf{E}$  električno polje,  $\mathbf{B}$  magnetska indukcija,  $\varepsilon_0$  električna permitivnost vakuuma,  $\mu_0$  magnetska permeabilnost vakuuma, tako da je  $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ ,  $c$  je brzina svjetlosti.

Eliminiramo  $\mathbf{B}$  iz izraza (1.27) i (1.28) tako da djelujemo s  $\nabla \times$  na obje strane jednadžbe (1.28) i deriviramo po vremenu izraz (1.27). Kako prostorne i vremenske derivacije komutiraju,

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

dobivamo

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Primjena izraza (1.24) i (1.26) daje

$$(\nabla \cdot \nabla)\mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2},$$

valnu jednadžbu za elektomagnetske valove. Ako izrazimo električno polje  $\mathbf{E}$  preko Cartesijevih komponenti dobijemo tri skalarne valne jednadžbe, pri čemu se u svakoj jednadžbi pojavljuje skalarni Laplacijan.

Kada se u Maxwellovim jednadžbama pojavljuje i električni naboj i gustoća struje, slične valne jednadžbe vrijede za električni potencijal i vektorski potencijal. Da bismo to pokazali riješit ćemo jednadžbu (1.25) izražavajući  $\mathbf{B}$  kao  $\nabla \times \mathbf{A}$ . Kada taj izraz uvrstimo u Faradayev zakon u diferencijalnom obliku (1.28) dobijemo  $\nabla \times (\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) = 0$ . Iščezavanje rotacije znači da je  $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$  gradijent, tj da se može napisati kao  $-\nabla\phi$ , gdje se  $\phi(\mathbf{r},t)$  definira kao (nestatički) električni potencijal. Ovi rezultati za  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$ ,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

rješavaju homogene Maxwellove jednadžbe. Sada ćemo pokazati da nehomogene Maxwellove jednadžbe u diferencijalnom obliku

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \varepsilon_0 \quad \text{Gaussov zakon}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J} \quad \text{Oerstedov zakon}$$

vode na valne jednadžbe za  $\mathbf{A}$  i  $\varphi$ , pod uvjetom da je  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  određena ograničenjem  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ . Ovaj izbor fiksiranja divergencije vektorskog potencijala naziva se Lorentzovo baždarenje i služi nam za razvezivanje diferencijalnih jednadžbi za ova dva potencijala. Baždarenje pritom nije ograničenje jer nema nikakvog fizikalnog efekta. Kada uvrstimo naše rješenje za električno polje u Gaussov zakon dobivamo

$$\frac{\rho}{\epsilon_0} = \nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla^2 \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = -\nabla^2 \varphi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

To je nehomogena valna jednadžba za električni potencijal. U zadnjem koraku smo koristili Lorentzovo baždarenje za zamjenu divergencije vektorskog potencijala s vremenskom derivacijom električnog potencijala.

Naposljetku, uvrštavamo  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  u Oersteadov zakon i koristimo relaciju (1.24) kako bi rastavili  $\nabla^2$  na longitudinalnu (izraz s gradijentom) i transverzalnu (izraz s rotacijom) komponentu.

$$\mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} - \frac{1}{c^2} \left( \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right),$$

gdje smo u zadnjem koraku iskoristili rješenje za električno polje. Lorentzovo baždarenje eliminira izraz s gradijentom pa nam ostaje valna jednadžba za vektorski potencijal

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}.$$

Naposljetku, ako djelujemo operatorom divergencije na Oersteadov zakon, uvažimo da je  $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{B} = 0$ , i iskoristimo Gaussov zakon,  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$ , dobijemo jednadžbu kontinuiteta za gustoću struje  $\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial \rho}{\partial t}$ . Ovaj korak opravdava uvođenje Maxwellove struje pomaka u generalizaciju Oersteadovog zakona na nestacionarna rješenja.

## Vektorska integracija

### Krivuljni integrali

Diferencijalni vektor pomaka dan je izrazom  $d\mathbf{r} = i dx + j dy + k dz$ . U fizici često susrećemo krivuljni integral (koristi se i naziv linijski integral)

$$\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}, \quad (1.29)$$

gdje se integrira po nekoj krivulji  $C$  koja može biti otvorena (početna i konačna točka su različite) ili zatvorena (čini petlju), umjesto po nekom segmentu  $x$ -osi. Riemannov integral se definira dijeljenjem krivulje u sve manje intervale čiji broj neograničeno raste

$$\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \mathbf{V}(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta \mathbf{r}_i,$$

gdje se pretpostavlja da svi  $|\Delta \mathbf{r}_i| \rightarrow 0$  kad  $N \rightarrow \infty$ . Općenito, vrijednost krivuljnog integrala ne ovisi samo o krajnjim točkama već i o putu  $C$  koji ih spaja. Ako je  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ ,  $t \in [a, b]$ , parametrizacija krivulje  $C$ , tada krivuljni integral daje

$$\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \quad (1.30)$$

Oblik izraza (1.29) isti je kao oblik koji susrećemo pri proračunu rada sile tijekom puta

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int F_x(x, y, z) dx + \int F_y(x, y, z) dy + \int F_z(x, y, z) dz$$

tj. imamo sumu uobičajenih integrala po jednoj varijabli.

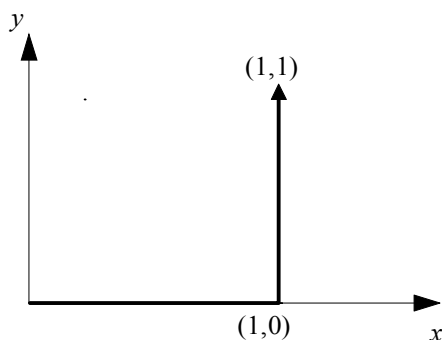
#### Primjer 16

##### Rad ovisan o putu

Sila koja djeluje na tijelo je  $\mathbf{F} = -iy + jx$ . Treba izračunati rad učinjen na putu od ishodišta do točke (1,1).

$$\begin{aligned} W &= \int_{0,0}^{1,1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{0,0}^{1,1} (-y dx + x dy) \\ &= -\int_0^1 y dx + \int_0^1 x dy \end{aligned}$$

Da bi se riješio prvi integral treba odrediti kako  $y$  ovisi o  $x$ -u. Također da bi se riješio drugi integral treba odrediti kako  $x$  ovisi o  $y$ -u. Promotrimo put prikazan na Crt. 11.



Crt. 11 Put integracije

Tada je

$$W = -\int_0^1 0 dx + \int_0^1 1 dy = 1$$

jer je  $y=0$  duž prvog segmenta puta, a  $x=1$  na drugom segmentu. Ako izaberemo put  $[x=0, 0 \leq y \leq 1]$  i  $[0 \leq x \leq 1, y=1]$  dobivamo  $W=-1$ . Za ovu silu rad ovisi o putu.

Također susrećemo i krivuljne integrale:  $\int_C \varphi \cdot d\mathbf{r}$  i  $\int_C \mathbf{V} \times d\mathbf{r}$  koji se rješavaju na sličan način.

Neki od fizikalnih primjera krivuljnih integrala su i Ampèreov zakon za magnetsko polje  $\mathbf{B}$ ,  $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I$ , gdje je  $I$  struja unutar zatvorene petlje  $C$ . Zatim, ako se petlja žice  $C$  stavi u magnetsko polje  $\mathbf{B}$  tada je sila  $d\mathbf{F}$  na mali element petlje  $d\mathbf{r}$  dana izrazom  $d\mathbf{F} = I d\mathbf{r} \times \mathbf{B}$  pa je ukupna sila na petlju jednaka

$$\mathbf{F} = I \oint_C d\mathbf{r} \times \mathbf{B}.$$

### Primjer 17

#### Gravitacijska potencijalna energija

Ako se sila može opisati skalarnom funkcijom  $V_G$  na način da je  $\mathbf{F}_G = -\nabla V_G$ , posvuda tada  $V_G$  nazivamo potencijalnom energijom, a nekad i skalarnim potencijalom te sile.  $V_G$  je određen do na proizvoljnu aditivnu konstantu; to odgovara izboru referentne nulte razine potencijalne energije i nema utjecaja na silu  $\mathbf{F}$ . Totalni diferencijal  $dV_G = -\nabla V_G \cdot d\mathbf{r} = -\mathbf{F}_G \cdot d\mathbf{r}$  je rad izvršen na svladavanju sile  $\mathbf{F}$  duž puta  $d\mathbf{r}$ , pa je integrirani rad duž bilo kojeg puta od početne točke  $\mathbf{r}_0$  do konačne točke  $\mathbf{r}$  dan krivuljnim integralom  $\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} dV_G = V_G(\mathbf{r}) - V_G(\mathbf{r}_0)$ , odnosno razlikom potencijalnih energija na rubovima puta. Da bismo pronašli gravitacijsku potencijalnu energiju integrirat ćemo silu od beskonačnosti, gdje uzimamo da je potencijalna energija nula 0, do točke  $\mathbf{r}$ . Dobivamo

$$V_G(\mathbf{r}) - V_G(\mathbf{r}_0) = -\int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_G \cdot d\mathbf{r} = +\int_{\mathbf{r}}^{\infty} \mathbf{F}_G \cdot d\mathbf{r}.$$

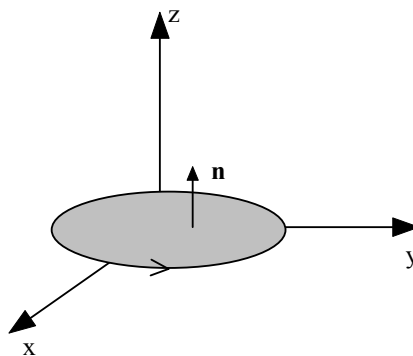
Pošto vrijedi da je  $\mathbf{F}_G = -\mathbf{F}_{\text{primijenjena}}$ , dolazimo do interpretacije da je potencijalna energija rad izvršen pri pomicanju masa iz beskonačnosti na međusobnu udaljenost  $r$  konstantnom brzinom (Možemo definirati samo razliku potencijalnih energija. Ovdje proizvoljno kažemo da je potencijalna energija nula u beskonačnosti). Pošto je gravitacijska sila  $\mathbf{F}_G$  radijalna, ona doprinosi  $V_G$  samo kada je  $d\mathbf{r}$  radijalan, odnosno

$$V_G(r) = -\int_r^{\infty} \frac{k}{r^2} = -\frac{k}{r} = -\frac{Gm_1 m_2}{r}$$

Negativni predznak je posljedica privlačne prirode gravitacijske sile.

### Plošni integrali

Plošni se integrali pojavljuju u istoj formi kao i krivuljni, tj. element površine je također vektor  $d\boldsymbol{\sigma}$ . U literaturi se ponekad koristi i izraz „površinski integrali“. Često se površinski element piše kao  $\mathbf{n}dA$ , gdje je  $\mathbf{n}$  jedinični (normalni, okomiti) vektor koji označava pozitivan smjer. (Iako  $\mathbf{n}$  uvijek ima jediničnu duljinu, smjer vektora može biti funkcija položaja). Postoje dvije konvencije za odabiranje pozitivnog smjera. Prvo, ako je ploha zatvorena dogovorno se uzima da je pozitivan smjer prema vani. Drugo, ako je ploha otvorena, pozitivan smjer okomice ovisi o smjeru kojim se obilazi obod plohe. Ako prste desne ruke zavijemo u smjeru obilaska oboda, palac desne ruke nam pokazuje pozitivan smjer. Kao primjer, ako krug na Crt. 12 obilazimo od  $x$  do  $y$ , zatim do  $-x$  te do  $-y$  i nazad do  $x$ , tada će vektor normale na plohu biti usmjeren u smjeru  $+z$  osi (za desni koordinatni sustav). Napominjemo da postoje i neorijentabilne krivulje za koje nije moguće konzistentno definirati smjer.



Crt. 12 Pravilo desne ruke za vektor normale

Plošni integrali u fizici često se pojavljuju u obliku:  $\int \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ . Možemo ih interpretirati kao tok kroz danu plohu. Uočite da i fizikalno i iz svojstava skalarnog produkta slijedi da tangencijalne komponente brzine ne doprinose toku kroz plohu.

Formalna definicija plošnog integrala vrlo je slična definiciji krivuljnog integrala. Plohu  $A$  podijelimo u  $N$  elemenata površine  $\Delta A_i$ ,  $i=1, \dots, N$ , pri čemu svaki element površine ima jedinični vektor normale  $\hat{\mathbf{n}}_i$ . Ako je  $(x_i, y_i, z_i)$  bilo koja točka u  $\Delta A_i$  tada se npr. integral  $\int \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$  definira kao

$$\int_A \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \mathbf{V}(x_i, y_i, z_i) \cdot \hat{\mathbf{n}}_i \Delta A_i,$$

gdje se zahtijeva da svi  $\Delta A_i \rightarrow 0$  kad  $N \rightarrow \infty$ .

Plošni integrali mogu se pojaviti i u oblicima  $\int \boldsymbol{\phi} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$  te  $\int \mathbf{V} \times d\boldsymbol{\sigma}$ .

Kao što je već rečeno, plošni integrali u fizici najčešće se pojavljuju kod proračuna toka. Na primjer, promotrimo plohu  $S$  u fluidu gustoće  $\rho(\mathbf{r})$  koji ima brzinu  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ . Tada je masa fluida koji u vremenu  $dt$  proteče kroz površinski element  $dS$  jednaka  $dM = \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} dt$  pa je ukupni tok mase fluida kroz plohu  $S$  jednak  $\int_S \rho(\mathbf{r}) \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$ . Također, u elektromagnetizmu, tok elektromagnetske energije iz nekog volumena  $V$  koji je omeđen plohom  $S$  dan je izrazom  $\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$ . Skalarni se plošni integrali pojavljuju kad želimo izračunati ukupni električni naboj na nekoj površini, ili masu neke ljuske,  $\int_S \rho(\mathbf{r}) dS$ , gdje je  $\rho(\mathbf{r})$  gustoća naboja ili mase.

### *Volumni integrali*

Volumni se integrali pojavljuju u obliku  $\int_V \mathbf{V} d\tau$  i  $\int_V \phi d\tau$ . Jednostavniji su od površinskih jer je volumni element  $d\tau$  skalar (često se označava i sa  $d^3r$ ,  $d^3x$ ,  $dV$ ). Imamo

$$\int_V \mathbf{V} d\tau = \mathbf{i} \int_V V_x d\tau + \mathbf{j} \int_V V_y d\tau + \mathbf{k} \int_V V_z d\tau$$

pa se tako volumni integral reducira na sumu skalarnih integrala. Fizikalni su primjeri ukupna masa fluida u posudi volumena  $V$ , dana izrazom  $\int_V \rho(\mathbf{r}) dV$  te ukupni linearni moment impulsa tog fluida, dan sa  $\int_V \rho(\mathbf{r}) \mathbf{v}(\mathbf{r}) dV$ , gdje je  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  polje brzine u fluidu.

### ***Integralne definicije gradijenta, divergencije i rotacije***

Zanimljiva i važna primjena površinskih i volumnih integrala je u razvijanju alternativnih definicija diferencijalnim izrazima za gradijent, divergenciju i rotaciju. Može se pokazati da je

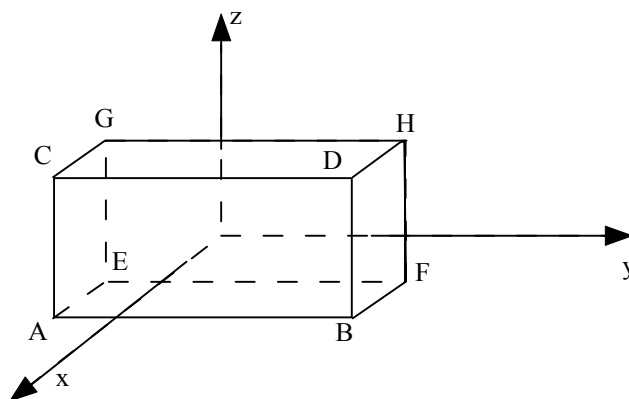
$$\nabla \phi = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\int \phi d\boldsymbol{\sigma}}{\Delta V}, \quad (1.31)$$



$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\int \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma}}{\Delta V} \quad (1.32)$$

$$\nabla \times \mathbf{V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\int \mathbf{V} \times d\boldsymbol{\sigma}}{\Delta V} \quad (1.33)$$

U ove tri relacije  $\Delta V$  je mali volumen, a  $d\boldsymbol{\sigma}$  je površinski element tog malog volumena. Relaciju (1.32) smo identificirali s divergencijom u razmatranju fizikalne interpretacije  $\nabla(\rho\mathbf{v})$ . Sada ćemo pokazati da je (1.31) u skladu s našom ranijom definicijom gradijenta. Radi jednostavnosti, izabiremo za  $\Delta V$  diferencijalni volumen  $dx dy dz$ <sup>4</sup>. Postavljamo ishodište u geometrijski centar volumnog elementa (Crt. 13).



Crt. 13 Diferencijalni volumen s centrom u ishodištu

Površinski integral vodi na šest integrala, jedan za svaku stranicu.  $d\boldsymbol{\sigma}$  je usmjeren prema vani, pa je  $\hat{\mathbf{x}} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = -|d\boldsymbol{\sigma}|$  za površinu EFGH, a  $\hat{\mathbf{x}} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = +|d\boldsymbol{\sigma}|$  za površinu ABCD.

$$\begin{aligned} \int \varphi d\boldsymbol{\sigma} &= -\hat{\mathbf{x}} \int_{EFGH} \varphi dydz + \hat{\mathbf{x}} \int_{ABCD} \varphi dydz \\ &\quad -\hat{\mathbf{y}} \int_{AEGC} \varphi dx dz + \hat{\mathbf{y}} \int_{BFHD} \varphi dx dz \\ &\quad -\hat{\mathbf{z}} \int_{ABFE} \varphi dx dy + \hat{\mathbf{z}} \int_{CDHG} \varphi dx dy \end{aligned}$$

Na svim stranicama skalarnu funkciju  $\varphi(x,y,z)$  razvijamo u McLaurentov red oko ishodišta i zadržavamo samo prva dva člana (što je opravdano jer ćemo kasnije uzeti  $dx dy dz \rightarrow 0$ ). Na ovaj način je uključena prva korekcija za pomak centra svake stranice od ishodišta ( $\pm dx/2$ , itd.)

$$\begin{aligned} \int \varphi d\boldsymbol{\sigma} &= -\hat{\mathbf{x}} \int_{EFGH} \left( \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz + \hat{\mathbf{x}} \int_{ABCD} \left( \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz \\ &\quad -\hat{\mathbf{y}} \int_{AEGC} \left( \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz + \hat{\mathbf{y}} \int_{BFHD} \left( \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz \\ &\quad -\hat{\mathbf{z}} \int_{ABFE} \left( \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy + \hat{\mathbf{z}} \int_{CDHG} \left( \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy \end{aligned}$$

<sup>4</sup> Ovdje su ponovo korištene oznake iz reference [1]. Često se međutim umjesto  $dx dy dz$  uzima oznaka  $\Delta x \Delta y \Delta z$ .

Pošto smo izabrali volumen diferencijalne veličine  $dV = dxdydz$  može se ispustiti znakove za integrale na desnoj strani pa dobijemo

$$\int \varphi d\sigma = \left( \hat{x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dxdydz$$

Dijeljenjem sa  $dV = dxdydz$  dobijemo relaciju (1.31). Izraz (1.33) možemo provjeriti na isti način.

## Gaussov teorem

Izvest ćemo vrlo koristan izraz koji povezuje površinski integral nekog vektorskog polja s volumnim integralom divergencije tog istog vektorskog polja. Pretpostavimo da su vektorsko polje  $\mathbf{V}$  i njegove prve derivacije neprekidne funkcije na jednostavno povezanom (bez rupa) području koje nas zanima. Tada po **Gaussovom teoremu** vrijedi

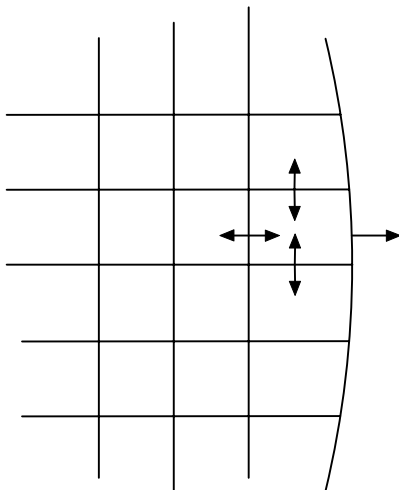
$$\int_S \mathbf{V} \cdot d\sigma = \int_V \nabla \cdot \mathbf{V} d\tau \quad (1.34)$$

Riječima, površinski integral vektora preko zatvorene površine jednak je volumnom integralu divergencije tog vektora po volumenu kojeg zatvara (obuhvaća) ta ploha.

Pretpostavimo da je volumen  $V$  podijeljen u proizvoljno veliki broj (diferencijalnih) paralelepipeda. Tada, iz analize koju smo proveli u poglavlju o fizikalnoj interpretaciji divergencije  $\nabla(\rho v)$  slijedi da za svaki diferencijalni paralelepiped vrijedi:

$$\sum_{6 \text{ stranica}} \mathbf{V} \cdot d\sigma = \nabla \cdot \mathbf{V} d\tau$$

Sumira se preko svih šest stranica diferencijalnog paralelepipeda. Ako sada zbrojimo sve diferencijalne paralelepipede, ustanovit ćemo da se izrazi sa  $\mathbf{V} \cdot d\sigma$  poništavaju (u parovima) na svim **unutrašnjim** stranicama; prežive samo doprinosi **vanjskih** stranica. (Crt. 14)



**Crt. 14** Izrazi sa  $\mathbf{V} \cdot d\sigma$  poništavaju (u parovima) na svim unutrašnjim stranicama; prežive samo doprinosi vanjskih stranica

Sada uzmemo graničnu vrijednost kada se broj paralelepipeda približava beskonačnosti ( $\rightarrow \infty$ ), a dimenzije svakog paralelepipeda se približavaju 0 ( $\rightarrow 0$ ). [Ovo je slično definiciji Riemannovog integrala]:

$$\sum_{\text{vanjskim stranicama}} \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \sum_{\text{volumenima}} \nabla \cdot \mathbf{V} d\tau$$

$$\oint_S \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{V} d\tau$$

Sa stanovišta fizike, već smo ustvrdili da  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  predstavlja rezultatni tok polja prema vani po jediničnom volumenu. Volumni integral samo daje ukupni rezultatni tok polja prema vani. Površinski integral  $\oint_S \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$  je samo drugi način da se izrazi ista fizikalna veličina.

Iskoristit ćemo Gaussov teorem da bismo pokazali da gravitacijsko polje tijela sa sferno simetričnom gustoćom mase  $\rho$  ovisi samo o ukupnoj masi tog tijela, a ne o raspodjeli mase po tijelu. Za sferno simetrično tijelo gustoća mase ovisi samo o radijusu. Zbog sferne simetričnosti mase, gravitacijsko je polje simetrično i usmjereno u radijalnom smjeru  $\mathbf{g}(\mathbf{r}) = g(r)\hat{\mathbf{r}}$ . Za gravitacijsko polje vrijedi  $\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho$ . Iz Gaussovog teorema slijedi

$$\oint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{g} dV = -4\pi G \int_V \rho dV = -4\pi GM,$$

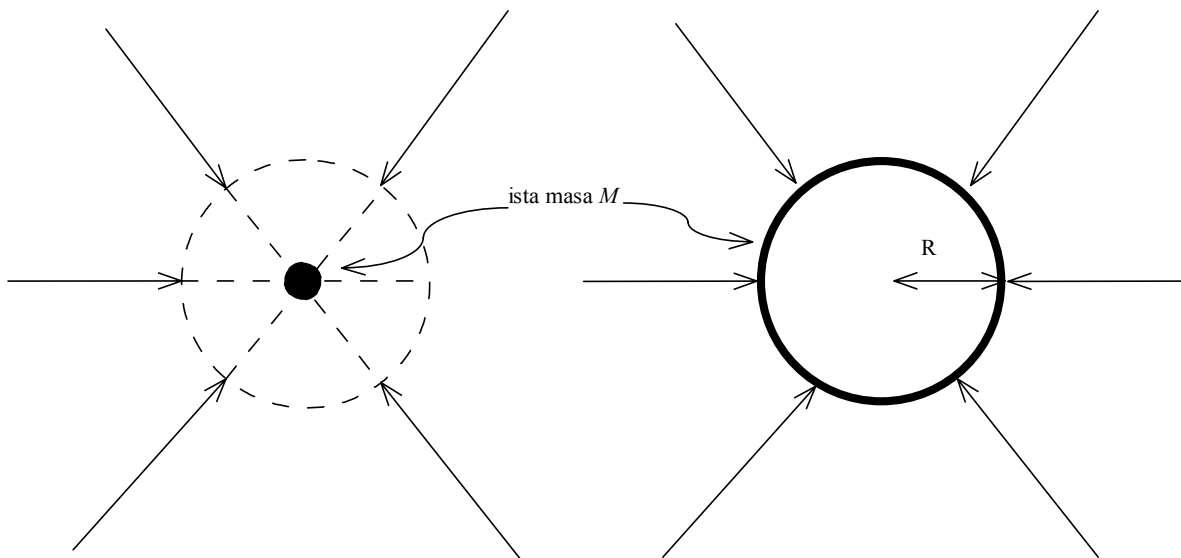
gdje je  $M$  ukupna masa tijela. Sada možemo izračunati integral na lijevoj strani po sferi radijusa  $r$  unutar koje se nalazi ukupna masa oba tijela (Crt. 15).

$$-4\pi GM = \oint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S g(r)\hat{\mathbf{r}}r^2\hat{\mathbf{r}}d\Omega = g(r)r^2 4\pi.$$

Izjednačavanjem lijeve i desne strane prethodne relacije slijedi

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -G \frac{M}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

U proračunu površinskog integrala koristili smo sferne koordinate koje ćemo detaljno promotriti u sljedećem poglavlju, a za koje vrijedi  $d\mathbf{S} = r^2\hat{\mathbf{r}}d\Omega$ .  $d\Omega$  je diferencijalni element prostornog kuta, koji prointegriran po svim kutovima daje  $4\pi$ .



**Crt. 15** Dva različita tijela s različitim raspodjelama mase stvaraju isto gravitacijsko polje na udaljenostima koje su veće od radijusa tijela na desnoj strani.

### Greenov teorem

Često korišten korolar Gaussovog teorema je relacija poznata kao Greenov teorem. Ako su  $u$  i  $v$  dvije skalarne funkcije tada iz pravila o deriviranju produkta slijede identiteti:

$$\nabla \cdot (u\nabla v) = u\nabla \cdot \nabla v + (\nabla u) \cdot (\nabla v) \quad (1.35)$$

$$\nabla \cdot (v \nabla u) = v \nabla \cdot \nabla u + (\nabla v) \cdot (\nabla u) \quad (1.36)$$

(1.36) oduzmemo od (1.35), integriramo po volumenu (pretpostavljamo da su  $u$ ,  $v$  i njihove derivacije neprekidne) i primijenimo Gaussov teorem pa dobijemo

$$\int_V (u \nabla \cdot \nabla v - v \nabla \cdot \nabla u) d\tau = \oint_S (u \nabla v - v \nabla u) \cdot d\sigma$$

Ovo je **Greenov teorem**, koji tvrdi da je antisimetričan Laplacijan para funkcija integriran preko jednostavno povezanog volumena (bez rupa) ekvivalentan antisimetričnom gradijentu para funkcija integriranom preko rubne površine tog volumena. Alternativan oblik Greenova teorema može se izvesti iz relacije (1.35):

$$\int_S u \nabla v \cdot d\sigma = \int_V u \nabla \cdot \nabla v d\tau + \int_V \nabla u \cdot \nabla v d\tau$$

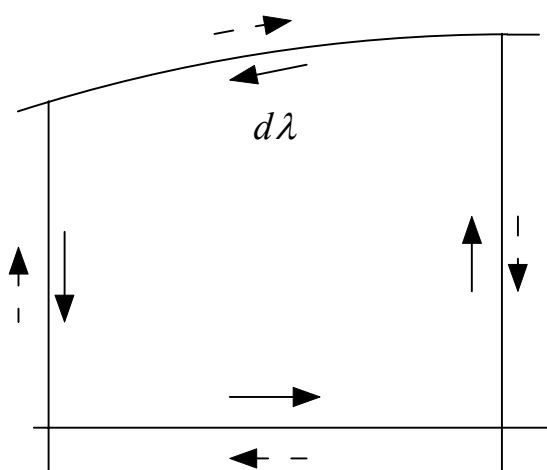
## Stokesov teorem

Promatramo relaciju koja je analogna Gaussovom teoremu, a povezuje plošni integral derivacije funkcije s krivuljnim integralom funkcije, gdje krivulja po kojoj se integrira obrubljuje plohu.

Odaberimo neku plohu i podijelimo je u mrežu proizvoljno malih pravokutnika. U poglavlju o fizikalnoj interpretaciji rotacije pokazali smo da je cirkulacija oko malog diferencijalnog pravokutnika (u  $xy$  ravnini) jednaka  $\nabla \times \mathbf{V}|_z dx dy$ . Stoga za jedan diferencijalni pravokutnik imamo

$$\sum_{4 \text{ stranice}} \mathbf{V} \cdot d\lambda = \nabla \times \mathbf{V} \cdot d\sigma \quad (1.37)$$

Sada prosumiramo po svim malim pravokutnicima. Površinski doprinosi s desne strane relacije (1.37) se zbrajaju, a krivuljni integrali (lijeva strana relacije (1.37)) svih unutrašnjih segmenata se poništavaju. Samo krivuljni integral po vanjskom rubu preživljava. (Crt. 16)



**Crt. 16** Unutrašnji se doprinosi krivuljnih integrala poništavaju pa opstaju samo vanjski.

Uzimajući uobičajeni limes kada broj pravokutnika teži u beskonačnost, a istodobno  $dx \rightarrow 0$  i  $dy \rightarrow 0$ , imamo

$$\sum_{\text{vanjskih segmenata}} \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\lambda} = \sum_{\text{pravokutnika}} \nabla \times \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

$$\oint_C \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\lambda} = \int_S \nabla \times \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (1.38)$$

**Ovo je Stokesov teorem.** Plošni integral na desnoj strani se računa po plohi koju obrubljuje krivuljni integral na lijevoj strani relacije (1.38). Vektor koji predstavlja plohu usmjeren je iz papira prema vani ako je smjer obilaska krivulje obratan od kazaljke na satu (kao na Crt. 16).

Stokesov teorem je primjenjiv na otvorene, jednostavno povezane plohe. Moguće je promotriti i zatvorenu površinu kao granični slučaj otvorene, jednostavno povezane plohe čiji otvor (i stoga krivulja po kojoj integriramo) teži u nulu. Tada slijedi  $\int_S \nabla \times \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0$ , gdje je  $S$  zatvorena ploha.

Kao poseban slučaj Stokesovog teorema promotrimo rotaciju dvodimenzionalnog vektorskog polja  $\mathbf{V} = (V_1(x,y), V_2(x,y), 0)$ . Rotacija  $\nabla \times \mathbf{V} = (0, 0, \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y})$  tako da je

$$\int_S \nabla \times \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{z}} dx dy = \int_S \left( \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) dx dy = \int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (V_1 dx + V_2 dy),$$

gdje je krivulja  $C$  rub jednostavno povezane otvorene plohe  $S$ , a integrira se u pozitivnom matematičkom smjeru (obratno od kazaljke na satu). Ovaj izraz se ponekad zove i Greenov teorem.

#### Primjer 18

##### Površina kao krivuljni integral

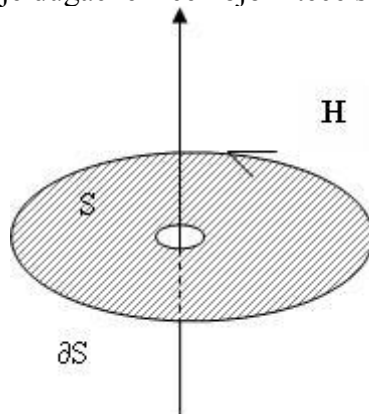
Za dvodimenzionalni Stokesov teorem izaberemo prvo da je  $\mathbf{V} = x\hat{\mathbf{y}}$ , pa dobijemo da je površina  $S = \int_S dx dy = \int_C x dy$ . Ako zatim izaberemo  $\mathbf{V} = y\hat{\mathbf{x}}$  dobijemo  $S = \int_S dx dy = -\int_C y dx$ .

Zbrajanjem ova dva rezultata slijedi da je površina dana izrazom

$$S = \int_S dx dy = \frac{1}{2} \int_C (x dy - y dx)$$

#### Oersteadov i Faradayev zakon

Promotrit ćemo magnetsko polje dugačke žice kojom teče struja  $I$ .



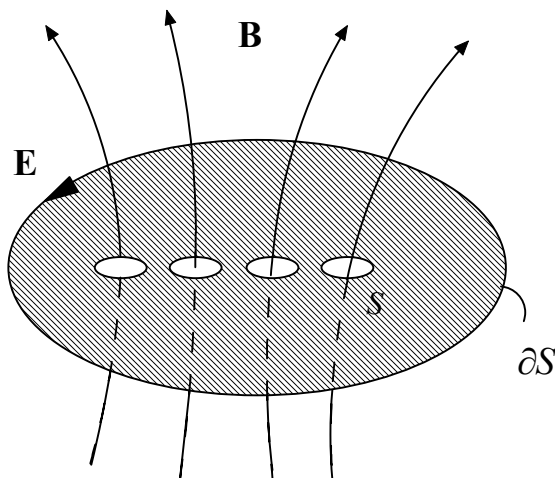
Crt. 17 Primjena Stokesovog teorema na magnetsko polje duge žice

Krećemo od Maxwellove jednačbe u diferencijalnom obliku  $\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}$ . U stacionarnom slučaju  $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$  pa slijedi da je  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ . Integriranjem po plohi  $S$  koja je okomita na žicu i primjenom Stokesovog teorema dobijemo:

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \oint_{\partial S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r}$$

Ovdje je  $\partial S$  krivulja koja obrubljuje plohu  $S$ .

Slično, možemo integrirati Maxwellovu jednačbu za  $\nabla \times \mathbf{E}$ ,  $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  i tako dobiti Faradayev zakon indukcije u integralnom obliku. Zamislimo da pomikemo zatvorenu petlju ( $\partial S$ ) žice (površine  $S$ ) u magnetskom polju  $\mathbf{B}$ .



Crt. 18 Pomicanje zatvorene petlje žice u magnetskom polju

U fiksnom trenutku  $t$  integriramo Maxwellovu jednačbu i primijenimo Stokesov teorem. Slijedi:

$$\int_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Krivuljni integral na lijevoj strani predstavlja inducirani napon u petlji, dok na desnoj strani izraza imamo vremensku promjenu magnetskog toka kroz petlju površine  $S$  koja se giba. Drugim riječima, promjenjivi tok magnetskog polja stvara električno polje te inducira napon u petlji žice.

### ***Konzervativne sile***

U ovom ćemo poglavlju formulirati potrebne uvjete da bi polje sila  $\mathbf{F}$  bilo konzervativno. S matematičke točke gledanja, ovo će biti tipična vježba primjene Gaussovog i Stokesovog teorema u fizici.

Ako silu u jednostavno povezanom području prostora  $V$  (u prostoru bez rupa) možemo izraziti kao negativni gradijent skalarnе funkcije  $\varphi$ ,

$$\mathbf{F} = -\nabla \varphi \tag{1.39}$$

tada  $\varphi$  nazivamo potencijalnom energijom (ponekad se koristi i naziv skalarni potencijal). Potencijalna energija je određen do na aditivnu konstantu, koja se može koristiti da bi se odredila vrijednost potencijalne energije u beskonačnosti (obično nula) ili u nekoj drugoj točki prostora. Silu  $\mathbf{F}$  koja se pojavljuje kao gradijent jednoznačne potencijalne energije zovemo **konzervativnom**. Želimo znati kada potencijalna energija postoji. Da bismo odgovorili na to pitanje pokazat ćemo da su druge dvije relacije

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0 \quad (1.40)$$

i

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad (1.41)$$

za svaku zatvorenu krivulju u našem jednostavno poveznom području  $V$ , ekvivalentne relaciji (1.39). Dakle, treba pokazati da iz svake od ove tri relacije slijede druge dvije. Počet ćemo sa

$$\mathbf{F} = -\nabla\varphi$$

Tada je

$$\nabla \times \mathbf{F} = -\nabla \times \nabla\varphi = 0.$$

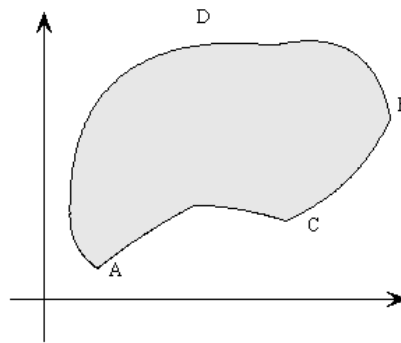
Nadalje

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\oint \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r} = -\oint d\varphi = 0$$

Integriranjem  $d\varphi$  dobivamo  $\varphi$ . Naša petlja je zatvorena što znači da su početna i konačna točka jednake pa dobivamo 0 za svaku zatvorenu petlju u našem području integriranja. Važno je uočiti ograničenje na jednoznačnu potencijalnu energiju i uvjet da relacija (1.39) vrijedi za cijelo područje integracije.

Pretpostavimo sada da jednadžba (1.41) vrijedi i pokažimo da iz nje slijede (1.39) i (1.40).

Ako je  $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$  tada je vrijednost integrala koji spaja dvije različite točke A i B neovisna o putu.



Crt. 19 Dva puta kojima se može gibati pri vršenju rada

Naime,

$$\oint_{ACBDA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 = \int_{ACB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{BDA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{ACB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{ADB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \Rightarrow$$

$$\int_{ACB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{ADB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Fizikalno, to znači da je rad izvršen gibajući se od točke A do točke B neovisan o putu i da je rad izvršen gibajući se po zatvorenoj putanji 0. To je razlog zbog kojega se takva sila zove konzervativna: energija je sačuvana.

Dakle, pošto rad ovisi samo o početnoj i konačnoj točki možemo pisati

$$\text{Rad sile} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \varphi(A) - \varphi(B) \quad (1.42)$$

Ovaj izraz definira potencijalnu energiju (strogo govoreći definira razliku potencijalnih energija između točaka A i B). Pomoću nje možemo računati potencijalnu energiju. Tako ako uzmemo da je točka B promjenjiva ( $x, y, z$ ) tada deriviranjem po  $x, y, z$  dobijemo relaciju (1.39).

Izbor predznaka je proizvoljan. Ovdje je načinjen takav izbor da se dobije relacija (1.39) i da se osigura da npr. voda teče u smjeru smanjenja potencijalne energije. Za točke A i B koje su udaljene za duljinu  $d\mathbf{r}$ , relacija (1.42) postaje

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -d\varphi = -\nabla\varphi \cdot d\mathbf{r} \Rightarrow$$

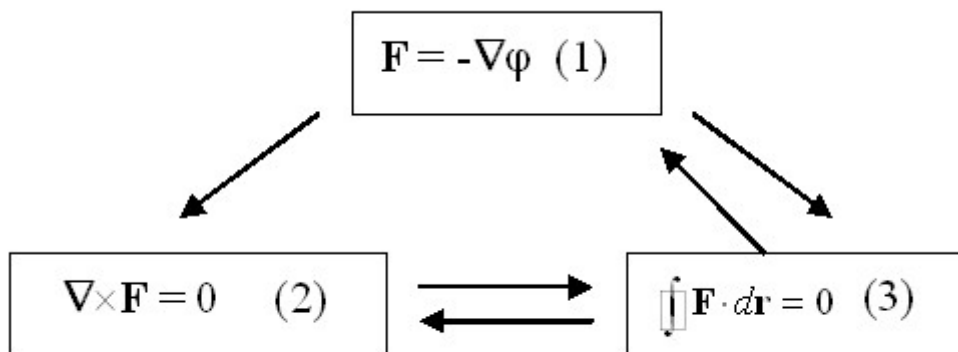
$$(\mathbf{F} + \nabla\varphi) \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Pošto je  $d\mathbf{r} \neq 0$  proizvoljan slijedi da mora biti ispunjeno  $\mathbf{F} = -\nabla\varphi$ . Nadalje, ako je  $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$  tada se korištenjem Stokesovog teorema dobije da je

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

Ako uzmemo da krivulja pokoj integriramo obrubljuje proizvoljnu diferencijalnu plohu  $d\boldsymbol{\sigma}$  tada slijedi da integrand u plošnom integralu mora iščezavati, odnosno da je  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ .

Naposljetku, ako vrijedi relacija (1.40)  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$  tada samo treba preokrenuti tvrdnju Stokesovog teorema da bismo dobili da je  $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ . A tad na isti način kao prije dobijemo da je  $\mathbf{F} = -\nabla\varphi$ . Trostruka ekvivalencija je ilustrirana na Crt. 20.



Crt. 20 Ekvivalentni uvjeti da bi polje sila  $\mathbf{F}$  bilo konzervativno

Promotrimo zašto je važno da područje u kojem razmatramo silu i potencijal bude jednostavno povezano. Neka je sila dana izrazom

$$\mathbf{F} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j}.$$

$\nabla \times \mathbf{F} = 0$  i u području koje ne sadrži ishodište potencijal postoji. Međutim, ako se u području nalazi ishodište, tada to ishodište treba isključiti, odnosno pojavljuje se rupa i potencijal više ne možemo definirati.

### Sažetak:

Jednoznačna potencijalna energija postoji ako i samo ako je  $\mathbf{F}$  irotacion tako da je rad po zatvorenom putu jednak nuli. Gravitacijska i elektrostatska sila su irotacione i stoga konzervativne. Gravitacijska i elektrostatska potencijalna energija postoje.



### Primjer 19

#### Centrifugalni potencijal

Izračunajte skalarni potencijal za „centrifugalnu inercijalnu silu“ po jedinici mase,  $\mathbf{F}_C/m = \omega^2 \mathbf{r}$ , koja je usmjerena radijalno prema vani. Fizikalno, „centrifugalnu inercijalnu silu“ osjećamo kad se nalazimo u neinercijalnom sustavu koji kruži, npr. na vrtuljku. U relaciji (1.42) za točku A odabiremo ishodište i odabiremo  $\varphi_C(0) = 0$ . Slijedi

$$\varphi_C(r) = - \int_0^r \mathbf{F}_C / m \cdot d\mathbf{r} = - \frac{\omega^2 r^2}{2}$$

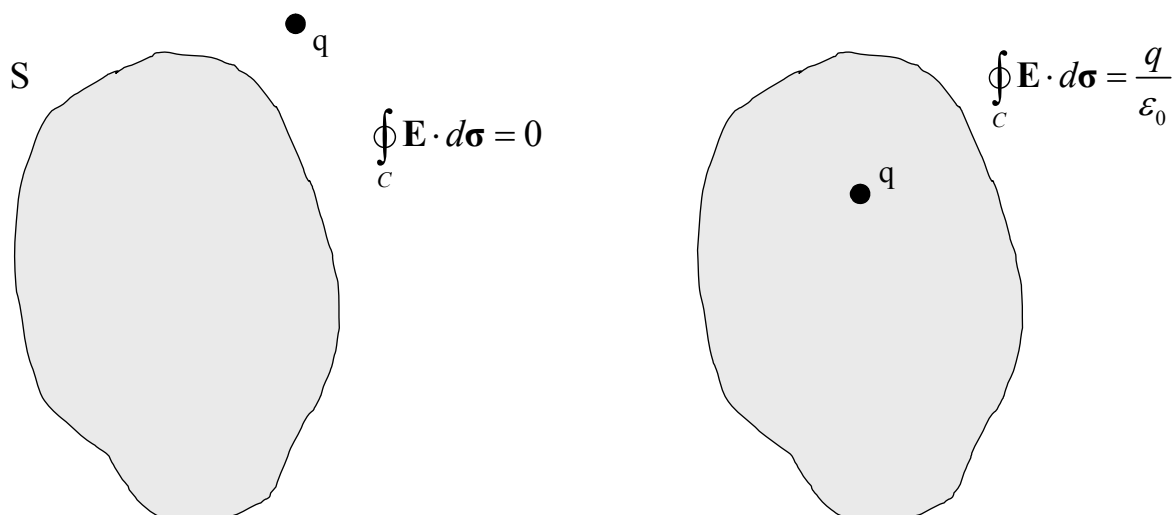
Elastična sila opruge koja se javlja kod jednostavnog harmoničkog oscilatora dana je sličnim izrazom  $\mathbf{F}_{\text{JHO}} = -k\mathbf{r}$ . Potencijalna energija jednostavnog harmoničkog oscilatora je  $1/2kr^2$ .

### Gaussov zakon

Promotrimo točkasti električni naboj  $q$  u ishodištu koordinatnog sustava. Naboj stvara električno polje  $\mathbf{E}$  dano relacijom

$$\mathbf{E} = \frac{q\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (1.43)$$

Sada ćemo pokazati ispravnost Gaussovog zakona koji kaže da je plošni integral na Crt. 21,  $q/\epsilon_0$ , ako zatvorena ploha  $S$  sadrži naboj  $q$ , a 0 ako zatvorena ploha ne uključuje ishodište.



Crt. 21 Gaussov zakon

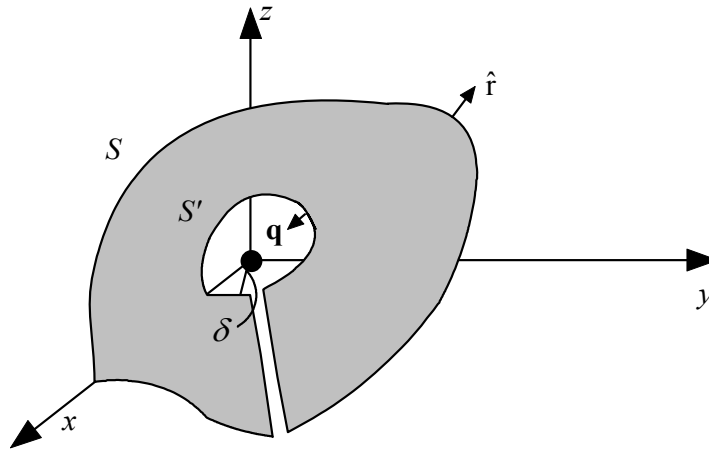
Ploha  $S$  je bilo kakva zatvorena ploha; ne treba nužno biti sferna.

Primijenit ćemo Gaussov teorem ( $\oint_S \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{V} d\tau$ ) na električno polje,  $\mathbf{V}=\mathbf{E}$ . Ako zanemarimo faktor  $q/4\pi\epsilon_0$ , dobijemo

$$\oint_S \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot d\boldsymbol{\sigma}}{r^2} = \int_V \nabla \cdot \left( \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) d\tau = 0.$$

Prethodni izraz međutim vrijedi samo pod uvjetom da ploha  $S$  ne uključuje ishodište jer u ishodištu podintegralna funkcija nije definirana. (To smo već vidjeli u primjeru o divergenciji centralnog polja.) Ovim smo dokazali drugi dio Gaussovog zakona.

Da bismo dokazali prvi dio, u kojem ploha  $S$  uključuje ishodište, ishodište ćemo okružiti malom sferom  $S'$  radijusa  $\delta$  (Crt. 22).



Crt. 22 Isključivanje ishodišta malom sferom

Volumen izvan vanjske plohe  $S$  i unutar unutrašnje plohe  $S'$  povezan je malim otvorom. Ovaj mali otvor povezuje i plohe  $S$  i  $S'$  i ujedinjuje ih u **jednu, jednostavno povezanu zatvorenu plohu**. Radijus zamišljenog otvora može se načiniti proizvoljno malim, tako da ne doprinosi plošnom integralu. Namjerno smo odabrali sfernu unutrašnju plohu  $S'$  kako bismo mogli prointegrirati po njoj. Gaussov teorem sada vrijedi za volumen između  $S$  i  $S'$ . Imamo

$$\oint_S \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot d\boldsymbol{\sigma}}{r^2} + \oint_{S'} \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot d\boldsymbol{\sigma}'}{\delta^2} = 0$$

Možemo riješiti drugi integral za  $d\boldsymbol{\sigma}' = -\hat{\mathbf{r}}\delta^2 d\Omega$ , gdje je  $d\Omega$  diferencijalni element prostornog kuta. Predznak  $-$  se pojavljuje iz razloga što smo se dogovorili da je u slučaju zatvorene plohe pozitivni smjer okomice na plohu  $\hat{\mathbf{r}}$  prema vani. U ovom slučaju smjer prema vani je u negativnom radijalnom smjeru  $\hat{\mathbf{r}}' = -\hat{\mathbf{r}}$ . Integriranjem po kutovima dobivamo

$$\oint_{S'} \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot d\boldsymbol{\sigma}'}{\delta^2} = -\oint_{S'} \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} \delta^2 d\Omega}{\delta^2} = -4\pi$$

Ovaj rezultat ne ovisi o radijusu  $\delta$ . Kada uvrstimo konstante iz (1.43) dobijemo

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (1.44)$$

čime smo završili dokaz Gaussovog zakona. Primijetite da iako ploha  $S$  može biti sferna, to nije nužan uvjet.

Promotrimo sada raspodjelu naboja za koju vrijedi

$$q = \int_V \rho d\tau$$

Relacija (1.44) još uvijek vrijedi, ali je sada naboj  $q$  u (1.44) ukupni raspodijeljeni naboj koji se nalazi unutar plohe  $S$ :

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} d\tau$$

Primjenom Gaussovog teorema dobivamo

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} d\tau = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} d\tau.$$

Volumen  $V$  sasvim je proizvoljan pa slijedi da podintegralne funkcije moraju biti jednake, tj. dobivamo jednu od Maxwellovih jednažbi

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.45)$$

Ako sada preokrenemo prethodni dokaz dobivamo da Gaussov zakon slijedi direktno integracijom iz Maxwellove jednažbe u diferencijalnom obliku.

### *Poissonova jednažba*

Ako u relaciji (1.45) zamijenimo  $\mathbf{E}$  sa  $-\nabla\phi$  dobivamo

$$\nabla \cdot \nabla \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

To je Poissonova jednažba. Poopćenjem sume Coulombovih potencijala diskretnih naboja na integral po kontinuiranoj raspodjeli naboja nalazimo da je rješenje Poissonove jednažbe

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}') d\tau'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

U slučaju kada je  $\rho=0$  dobivamo još poznatiju Laplaceovu jednažbu

$$\nabla \cdot \nabla \phi = 0.$$

Usporedimo li Coulombovu elektrostatsku silu s Newtonim općim zakonom gravitacije

$$\mathbf{F}_E = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{F}_G = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

vidimo da se potencijalna teorija koju smo razvijali može primijeniti podjednako dobro i na gravitacijski potencijal. Tako je npr. gravitacijska Poissonova jednažba

$$\nabla \cdot \nabla \phi = 4\pi G \rho,$$

gdje je  $\rho$  sada gustoća mase.

### *Diracova delta funkcija*

U linearnoj algebri uvedena je jedinična matrica  $\mathbf{I}$  koja svaki vektor  $\mathbf{v}$  preslikava u samoga sebe

$$\mathbf{I} \mathbf{v} = \mathbf{v}.$$

Prethodna relacija raspisana po komponentama je

$$\sum_j I_{ij} v_j = v_i \quad (1.46)$$

Dijagonalni elementi jedinične matrice su jedan, dok su elementi izvan dijagonale 0. To znači da su elementi jedinične matrice jednaki Kronckerovom delta simbolu  $I_{ij} = \delta_{ij}$ , koji je definiran na sljedeći način:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{za } i = j \\ 0 & \text{za } i \neq j \end{cases}$$

Prethodni izraz pokazuje da kada jedinična matrica  $\mathbf{I}$  djeluje na sve komponente vektora  $v_j$  kao rezultat se dobije komponenta  $v_i$ . U ovom poglavlju želimo generalizirati ovu ideju na funkcije.

Drugim riječima, pitamo se možemo li naći takvu funkciju  $I(x_0, x)$  koja će kada se integrira s funkcijom  $f(x)$  po  $x$ , dati vrijednost funkcije  $f$  u točki  $x_0$ :

$$\int I(x_0, x) f(x) dx = f(x_0) \quad ? \quad (1.47)$$

Uočite sličnost izraza (1.46) i (1.47). Vektor  $\mathbf{v}$  je zamijenjen s funkcijom  $f$ , suma po  $j$  je zamijenjena integralom po  $x$ , a indeks  $i$  odgovara vrijednosti  $x_0$ .

Pokušati ćemo pogoditi generalizaciju  $I(x_0, x)$ . Kao prvi pokušaj promotrimo

$$I(x_0, x) \equiv \begin{cases} 1 & \text{za } x_0 = x \\ 0 & \text{za } x_0 \neq x \end{cases}$$

Ovo je vrlo loš pokušaj iz razloga što je sada podintegralna funkcija u (1.47) jednaka nuli svuda osim u jednoj točki, pa je integral 0. Kao poboljšanje mogli bismo pokušati s definicijom

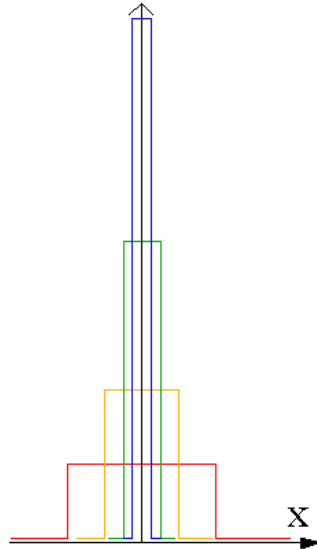
$$I(x_0, x) \equiv \begin{cases} \infty & \text{za } x_0 = x \\ 0 & \text{za } x_0 \neq x \end{cases}$$

Međutim prethodni izraz nije precizna definicija jer nije jasno što to znači ' $\infty$ '. Iz ovog naivnog pokušaja možemo nešto naučiti. Naime, on nam ukazuje da  $I(x_0, x)$  nije funkcija koja se 'dobro ponaša'; ima prekid u  $x=x_0$  i u toj točki joj je vrijednost beskonačna.

Korisna definicija može se dobiti promatranjem funkcije  $B_a(x)$  koja je definirana sa

$$B_a(x) \equiv \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{za } |x| \leq a \\ 0 & \text{za } |x| > a \end{cases}$$

Funkcija je prikazana za nekoliko vrijednost parametra  $a$  na Crt. 23.



**Crt. 23** Niz funkcija  $B_a(x)$

Lako se može pokazati da je  $\int_{-\infty}^{\infty} B_a(x)dx = 1$ . Sada ćemo funkciju  $B_a$  translirati tako da joj je centar u točki  $x_0$ , a zatim ćemo je pomnožiti s  $f(x)$  i integrirati po  $x$ -u.

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_a(x - x_0)f(x)dx = \frac{1}{2a} \int_{x_0-a}^{x_0+a} f(x)dx . \quad (1.48)$$

Integral na desnoj strani je prosjek funkcije  $f(x)$  na intervalu  $(x_0-a, x_0+a)$ , koji ima širinu  $2a$ . Ovo je vrlo koristan izraz; kako parametar  $a$  teži u nulu integral (3) teži ka vrijednosti funkcije  $f$  u točki  $x_0$ . To znači

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} B_a(x - x_0)f(x)dx = f(x_0) \quad (1.49)$$

odnosno da ovaj limes ima traženu osobinu operatora identiteta  $I(x_0, x)$  za neprekidne funkcije. Uobičajeno je ovaj operator označavati kao  $\delta(x - x_0)$  i zvati ga Diracovom delta funkcijom.

Diracova delta funkcija definira se za neprekidne funkcije iz (1.49)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)f(x)dx = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} B_a(x - x_0)f(x)dx .$$

Ima sljedeće svojstvo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)f(x)dx = f(x_0) \quad (1.50)$$

Promotrimo ponovo niz funkcija  $B_a(x)$ . Kako  $a$  teži u nulu vrijednost funkcije u nuli teži u beskonačnost, a širina teži u nulu. Naziv 'delta funkcija' uopće nije dobro odabran jer 'delta funkcija' nije funkcija. Njezina vrijednost nije definirana, a različita je od nule samo u području mjere 0. Međutim, unutar integrala (1.50) djelovanje delta funkcije je dobro definirano; ona je operator koji djeluje na funkciju i izabire vrijednost funkcije u točki  $x_0$ . Delta funkcija je primjer **raspodjele**. Raspodjela je matematički objekt koji je definiran unutar integrala. Limes, kada  $a$  teži u 0, integrala (1.49) dobro je definiran. Osobine delta funkcije možemo smisleno izreći samo kada se delta funkcija koristi unutar integrala.

U literaturi se susreće i sljedeća definicija delta funkcije njezinih osobina:

$$\delta(x) = 0, \quad x \neq 0$$

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx \quad (1.51)$$

Ovo je sasvim ekvivalentno našem prethodnom razmatranju uz  $x_0=0$ . Kao poseban slučaj relacije (1.51) imamo i  $1 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx$ .

Umjesto funkcija  $B_a(x)$  u definiciji delta funkcije može se pojaviti i neki drugi niz funkcija  $\delta_n(x)$ .

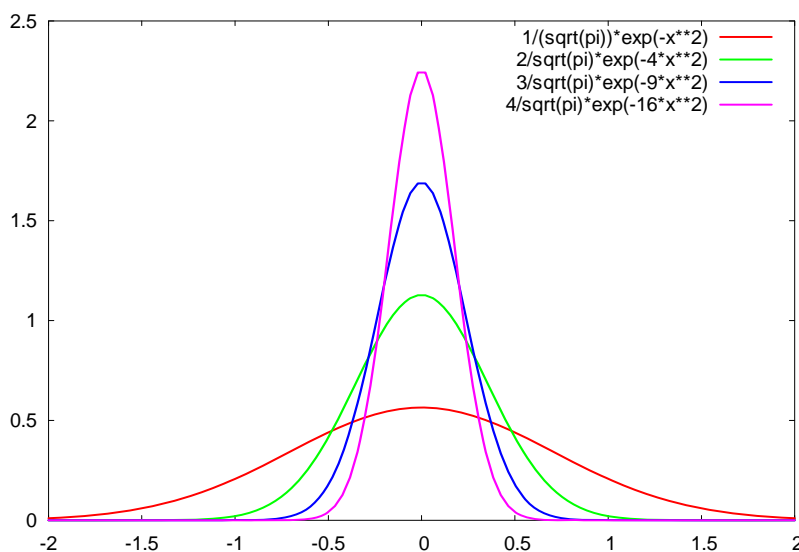
$$\delta_n(x) \equiv \begin{cases} 0, & \text{za } x < -\frac{1}{2n} \\ n, & \text{za } -\frac{1}{2n} < x < \frac{1}{2n} \\ 0 & \text{za } x > \frac{1}{2n} \end{cases} \quad (1.52)$$

(1.52) je ekvivalentno s  $B_a(x)$ .

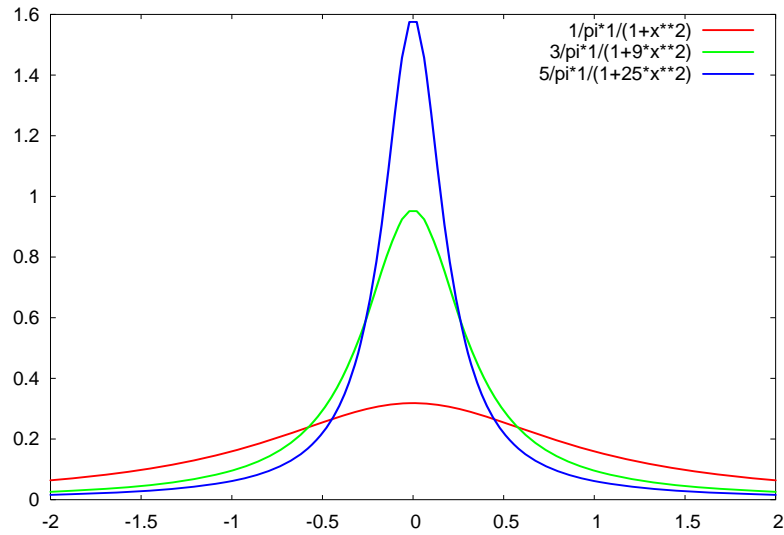
$$\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp(-n^2 x^2) \quad (1.53)$$

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\pi} \cdot \frac{1}{1+n^2 x^2} \quad (1.54)$$

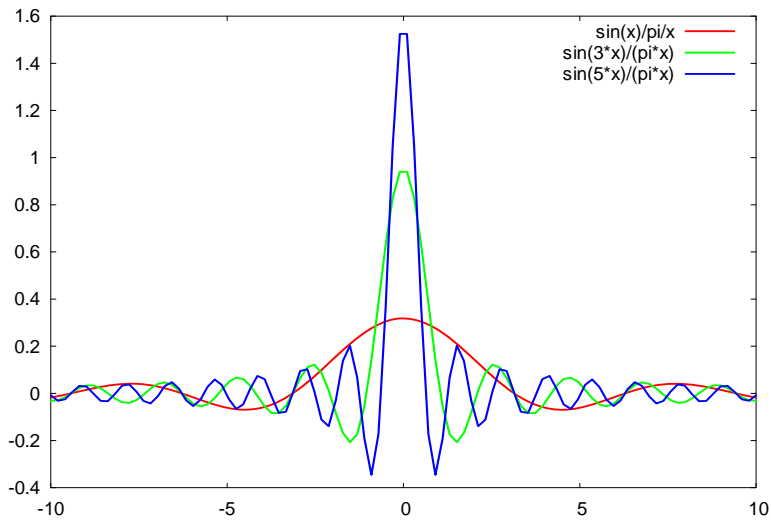
$$\delta_n(x) = \frac{\sin nx}{\pi x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n e^{ixt} dt \quad (1.55)$$



**Crt. 24** Niz funkcija (1.53).



Crt. 25 Niz funkcija (1.54)



Crt. 26 Niz funkcija (1.55)

**Primjer 20**

Treba proračunati  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \delta(x) dx = \cos 0 = 1$  korištenjem niza (1.52).

$$\int_{-1/2n}^{1/2n} n \cos x dx = n \sin x \Big|_{-1/2n}^{1/2n} = n \left( \sin \left( \frac{1}{2n} \right) - \sin \left( -\frac{1}{2n} \right) \right) = 2n \sin \frac{1}{2n}$$

$$= 2n \left( \frac{1}{2n} + O(1/n^3) \right) \rightarrow 1 \quad \text{za } n \rightarrow \infty$$

Slično se dobije  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \delta(x) dx = \sin 0 = 0$ . Umjesto niza funkcija (1.52) mogli smo koristiti i npr. niz (1.54).

$$\begin{aligned} \frac{n}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{1+n^2 x^2} &= \frac{n}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-x^2/2+\dots) dx}{1+n^2 x^2} \approx \frac{n}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+n^2 x^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{\pi} [\arctan(\infty) - \arctan(-\infty)] = \\ &= \frac{2}{\pi} \arctan(\infty) \rightarrow \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{2} = 1, \text{ za } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

U prethodnom proračunu smo zadržali samo prvi izraz u razvoj  $\cos x$  u red. Razlog tomu je što za veliki  $n$ , samo članovi blizu  $x=0$  doprinose integralu.

Primijetite da je delta funkcija parna  $\delta(-x) = \delta(x)$ .

### Primjer 2: Ukupni naboj unutar kugle

Promotrite ukupni tok električnog polja  $\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$  iz kugle radijusa  $R$  koja sadrži  $n$  naboja  $e_j$  koji se nalaze u točkama  $\mathbf{r}_j$  sa  $r_j < R$ . (tj. unutar kugle). Jakost električnog polja dana je izrazom  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ , gdje je potencijal

$$\varphi = \sum_{j=1}^n \frac{e_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r'$$

dan kao suma Coulombovih potencijala pojedinih naboja, odnosno kao integral gustoće naboja. U ovom je slučaju gustoća naboja

$\rho(\mathbf{r}) = \sum_j e_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) = \sum_j e_j \delta(x - x_j) \delta(y - y_j) \delta(z - z_j)$ . Delta funkcija nam je dakle korisna u definiranju gustoće točkastog naboja.

$\int \rho(\mathbf{r}) d\tau = \sum_j e_j \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) d\tau = \sum_j e_j$ . Ako sada iskoristimo Gaussov teorem za električno polje i Poissonovu jednadžbu dobijemo

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = -\oint \nabla \varphi \cdot d\boldsymbol{\sigma} = -\int \nabla^2 \varphi d\tau = \int \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} d\tau = \frac{\sum_j e_j}{\epsilon_0}.$$

Delta funkcija je korisna općenito za opis sustava čestica i kod pojma točkaste mase koji označava konačnu masu  $M$  skoncentriranu u nekoj točki  $\mathbf{r}_0$ . Pridružena gustoća mase  $\rho(\mathbf{r})$  je tada jednaka nuli svuda osim za  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ . Integral gustoće mase po volumenu mora nam dati ukupnu masu:  $\int \rho(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} = M$ .

Da bi zadovoljili te uvjete  $\rho(\mathbf{r}) = M \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ .

Integralna osobina delta funkcije (1.51) korisna je u slučajevima kada je argument delta funkcije funkcija  $g(x)$  koja ima jednostavne nultočke na realnoj osi. To nas vodi na pravila:

$$\delta(ax) = \frac{1}{a} \delta(x), \quad a > 0 \quad (1.56)$$

$$\delta(g(x)) = \sum_S \frac{\delta(x-a)}{|g'(a)|}, \quad (1.57)$$

gdje je  $S = \{a \in \mathbb{R} \mid g(a) = 0, g'(a) \neq 0\}$ .

Da bismo dokazali (1.56) zamijenimo integracijsku varijablu



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(ax)dx = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{y}{a}\right)\delta(y)dy = \frac{1}{a} f(0) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx.$$

U dokazu relacije (1.57) treba prvo uočiti da delta funkcija  $\delta(x)$  daje doprinos različit od nule samo za  $x=0$ . To znači da je dovoljno izračunati  $\delta(g(x))$  blizu vrijednosti od  $x$  za koje je  $g(x)=0$ . Neka je jedina takva točka  $a$ ,  $g(a)=0$ . Blizu te točke funkciju  $g(x)$  možemo rastaviti u Taylorov red

$$g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + \frac{1}{2}g''(a)(x-a)^2 + \dots$$

Budući je  $a$  nultočka funkcije  $g(x)$  prvi je član prethodne relacije 0. Ako u prvoj aproksimaciji zanemarimo član drugog i viših redova dobivamo

$$g(x) = (x-a)g'(a).$$

Korištenjem prethodne relacije slijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(g(x))dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(g'(a)(x-a))dx. \text{ Koeficijent } g'(a) \text{ je konstanta pa iz}$$

(1.56) slijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(g'(a)(x-a))dx = \frac{1}{|g'(a)|} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = \frac{1}{|g'(a)|} f(a).$$

U nazivniku prethodnog izraza nalazi se apsolutna vrijednost  $g'(a)$  jer za  $a < 0$  vrijedi  $\delta(ax) = -\delta(x)/a$ , što se pokazuje na isti način kao (1.56).

U slučaju da funkcija  $g(x)$  ima više nultočki potrebno je samo rastaviti integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(g(x))dx = \sum_a \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x)\delta((x-a)g'(a))dx$$

u sumu integrala preko malih intervala koji sadrže nultočke prvog reda funkcije  $g(x)$ .

U tim intervalima  $g(x) \approx g(a) + g'(a)(x-a) = (x-a)g'(a)$ . Korištenjem relacije

(1.56) na desnoj strani prethodnog izraza dobijemo (1.57).

### Primjer 21

Izračunajte  $I \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x^2-2)dx$ .

Nule argumenta delta funkcije su  $x^2=2$ ,  $x = \pm\sqrt{2}$ ,  $\frac{d(x^2-2)}{dx} = 2x$  pa integral možemo

napisati kao sumu dva doprinosa:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\sqrt{2}-\varepsilon}^{\sqrt{2}+\varepsilon} \delta(x-\sqrt{2}) \frac{f(x)}{2\sqrt{2}} dx + \int_{-\sqrt{2}-\varepsilon}^{-\sqrt{2}+\varepsilon} \delta(x+\sqrt{2}) \frac{f(x)}{2\sqrt{2}} dx \\ &= \frac{f(\sqrt{2}) + f(-\sqrt{2})}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Pomoću parcijalnog integriranja možemo doći do definicije **derivacije delta-funkcije**  $\delta'(x)$ .

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x-a)dx = [f(x)\delta(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(x-a)dx = -f'(a)$$

# **VEKTORSKA ANALIZA U ZAKRIVLJENIM KOORDINATNIM SUSTAVIMA I TENZORI**

U ovom ćemo poglavlju prije uvođenja općih ortogonalnih koordinata ukratko navesti sve relevantne izraze za Cartesijev sustav te uvesti cilindrični koordinatni sustav. Zatim ćemo promotriti sferne koordinate kao posebni slučaj ortogonalnih koordinata.

## ***Pravokutne Cartesijeve koordinate***

U slučaju Cartesijevih koordinata susrećemo se s tri familije međusobno okomitih ravnina:

$x=\text{konst}$ ,  $y=\text{konst}$ ,  $z=\text{konst}$ . U ovom, najjednostavnijem, koordinatnom sustavu radijus-vektor položaja i vektor  $\mathbf{V}$  dani su izrazima:

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{x}}x + \hat{\mathbf{y}}y + \hat{\mathbf{z}}z, \quad \mathbf{V} = \hat{\mathbf{x}}V_x + \hat{\mathbf{y}}V_y + \hat{\mathbf{z}}V_z$$

Koordinatni jedinični vektori  $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$  imaju konstantan iznos i smjer i međusobno su okomiti.

Iz Pitagorina teorema znamo da je kvadrat udaljenosti između dvije infinitezimalno bliske točke dan izrazom

$$d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

gdje suma kvadrata znači da su ove koordinate ortogonalne. Odnosno, nema bilinearnih članova  $dx dy$ ,  $dy dz$ ,  $dz dx$ .

Najčešći izrazi vektorske analize u ovom sustavu su:

$$\nabla \varphi = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

Najjednostavniji integrali su jednodimenzionalni skalari poput duljine prostorne krivulje

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt, \quad (2.1)$$

gdje je krivulja parametrizirana kao  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ .

Nadalje, najčešći krivuljni integrali imaju oblik

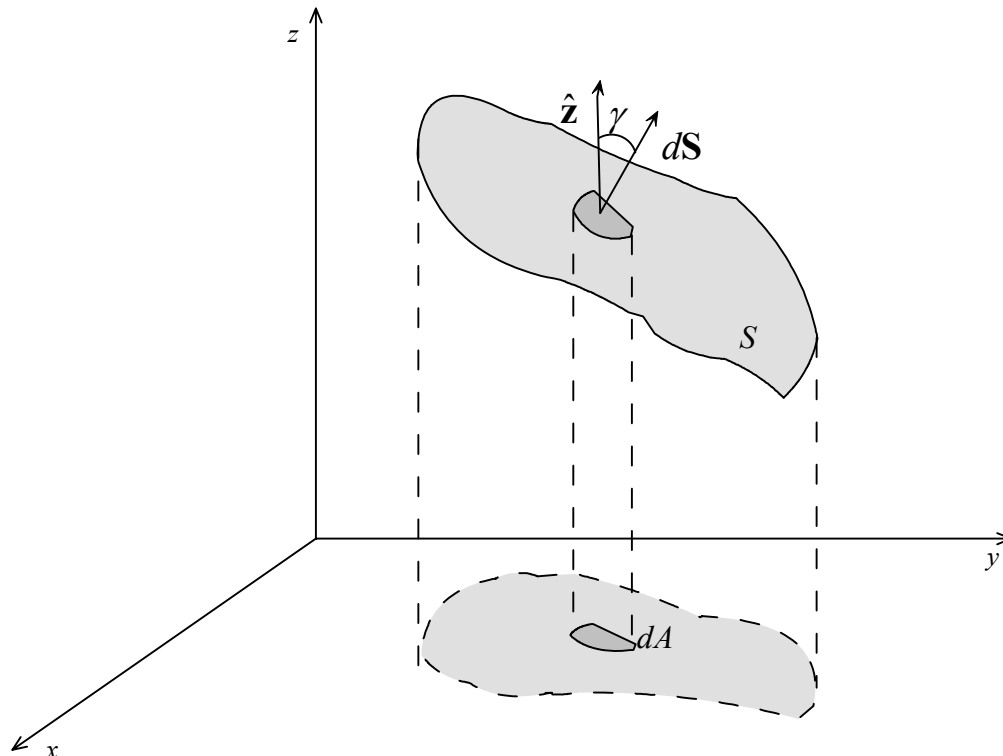
$$\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int (A_x dx + A_y dy + A_z dz) = \int (A_x \dot{x} + A_y \dot{y} + A_z \dot{z}) dt,$$

koji se svodi na sumu običnih integrala u Cartesijevim koordinatama.

S druge strane, površina plohe  $z=f(x,y)$  dana je plošnim integralom,

$$S = \int dS = \int \frac{dA}{n_z}, \quad \frac{1}{n_z} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

Integracija se proteže po projekciji plohe na  $xy$  ravninu (Crt. 27).



**Crt. 27** Ploha  $S$  (ili neki njen dio) projicira se u  $xy$  ravninu;  $dS$  je površinski element.

Pokažimo ispravnost ove relacije. Kada projiciramo  $dS$  u  $xy$  ravninu dobijemo  $dS \cos \gamma = dA$ , gdje je  $\cos \gamma = n_z$   $z$ -komponenta jediničnog vektora normale na plohu. Iz osobine gradijenta znamo da je  $\mathbf{n} = \nabla f / \sqrt{(\nabla f)^2}$ , odakle za plohu  $z=f(x,y)$  slijedi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial z} = 1 \text{ pa dobivamo traženu relaciju.}$$

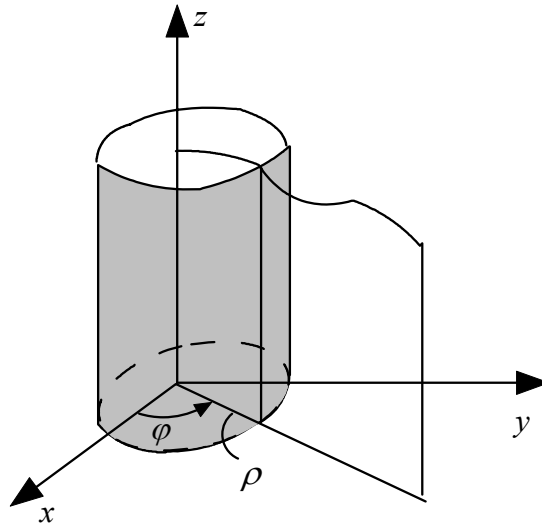
Volumen ograničen plohom  $z=z(x,y)$  određen je izrazom  $V = \iint z(x,y) dx dy$ , što predstavlja trodimenzionalnu generalizaciju dvodimenzionalne površine  $A = \int f(x) dx$  ispod krivulje  $y=f(x)$ .

## ***Kružne cilindrične koordinate***

U kružnom cilindričnom sustavu tri zakrivljene koordinate su  $(\rho, \varphi, z)$ . Granice  $\rho, \varphi, z$  su:

$$0 \leq \rho < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty,$$

pri čemu  $\varphi$  nije definiran za  $\rho = 0$ .  $\rho$  predstavlja udaljenost do  $z$  osi.



Crt. 28 Cilindrični koordinatni sustav

Koordinatne plohe, prikazane na Crt. 28 su:

1. Desni kružni cilindri kojima je  $z$ -os zajednička os

$$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2} = konst.$$

2. Poluravnine kroz  $z$ -os

$$\varphi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) = konst.$$

3. Ravnine paralelne s  $xy$ -ravninom, kao u Cartesijevom sustavu

$$z = konst.$$

Relacije transformacije s Cartesijevim koordinatnim sustavom su:

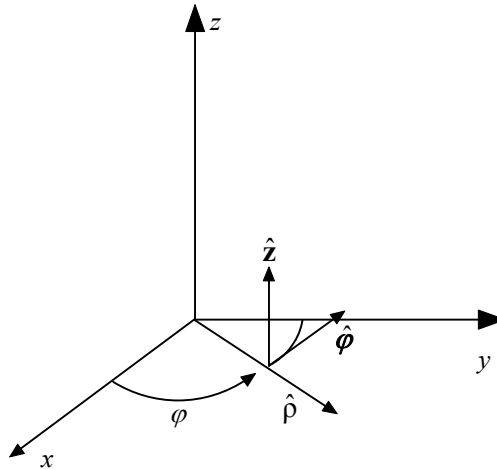
$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z$$

Koordinatni jedinični vektori su:  $\hat{\rho}, \hat{\varphi}, \hat{z}$  (Crt. 29).  $\hat{\varphi}$  nije definiran za  $\rho=0$ . Jedinični vektor  $\hat{\rho}$  je okomit na cilindričnu plohu i usmjeren je u smjeru povećanja radijusa  $\rho$ .  $\hat{\varphi}$  je tangencijalan na cilindričnu plohu, okomit na poluravninu  $\varphi=konst.$  i usmjeren prema smjeru povećanja kuta azimuta  $\varphi$ . Treći jedinični vektor  $\hat{z}$  je isti kao i u Cartesijevom slučaju. Jedinični vektori su međusobno ortogonalni, tj.

$$\hat{\rho} \cdot \hat{\varphi} = \hat{\rho} \cdot \hat{z} = \hat{z} \cdot \hat{\varphi} = 0$$

Radijus-vektor položaja i proizvoljni vektor  $\mathbf{V}$  dani su u kružnim cilindričnim koordinatama izrazima:

$$\mathbf{r} = \hat{\rho}\rho + \hat{z}z, \quad \mathbf{V} = \hat{\rho}V_\rho + \hat{\varphi}V_\varphi + \hat{z}V_z$$



Crt. 29 Koordinatni jedinični vektori u cilindričnom sustavu.

**Primjer 22**

**Udaljenost u cilindričnim koordinatama**

$$x = \rho \cos \varphi$$

$$dx = \cos \varphi d\rho - \rho \sin \varphi d\varphi, \quad dz = dz$$

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\rho \sin \varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial z} = 0$$

Slično se može pronaći

$$y = \rho \sin \varphi$$

$$dy = \sin \varphi d\rho + \rho \cos \varphi d\varphi$$

$$\frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho \cos \varphi$$

pa kvadriranjem i zbrajanjem slijedi:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$$

Linijski elementi u polarnim koordinatama označeni su na Crt. 30.

Korisno je promotriti vektor  $ds$  koji ima komponente  $d\rho$ ,  $\rho d\varphi$  i  $dz$  u koordinatnim smjerovima  $\hat{\rho}$ ,  $\hat{\phi}$  i  $\hat{z}$

$$ds = \hat{\rho} d\rho + \hat{\phi} \rho d\varphi + \hat{z} dz.$$

Znamo da je  $ds^2 = ds \cdot ds$ . Pronaći ćemo vezu između koordinatnih vektora u Cartesijevom i cilindričnom sustavu korištenjem algebarske metode.

$$ds = \hat{x} dx + \hat{y} dy + \hat{z} dz$$

$$= \hat{x} \left( \frac{\partial x}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi \right) + \hat{y} \left( \frac{\partial y}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi \right) + \hat{z} dz.$$

Korištenjem dobivenih izraza za parcijalne derivacije iz prethodnog primjera te usporedbom izraza za  $ds$  u cilindričnim i Cartesijevim koordinatama dobivamo

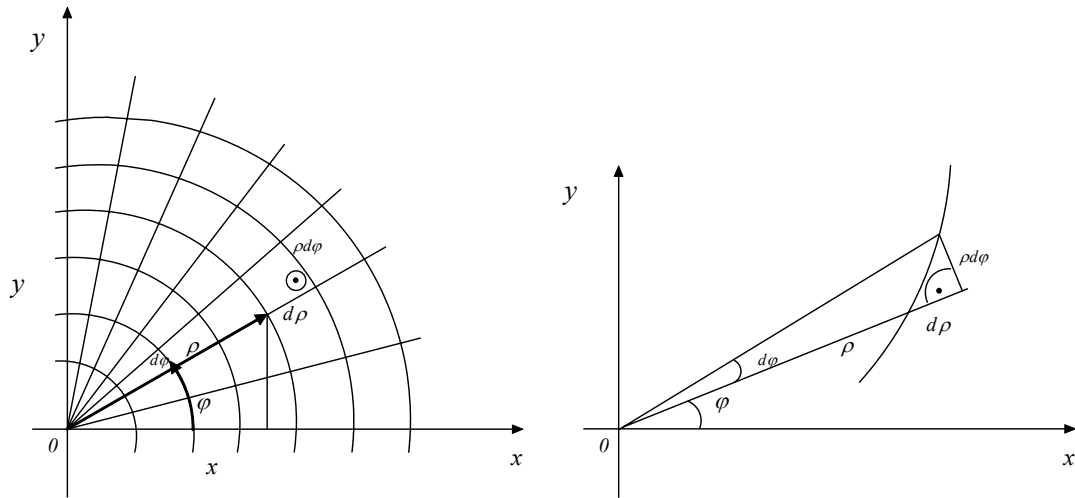
$$\hat{\rho} = \hat{x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \hat{y} \frac{\partial y}{\partial \rho} = \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi$$

$$\rho \hat{\varphi} = \hat{x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \hat{y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi$$

$$\hat{z} = \hat{z}$$

Važna napomena:  $\hat{\rho}$  i  $\hat{\varphi}$  ovise o položaju točke. Ove izraze možemo upotrijebiti za dobivanje brzine i akceleracije u cilindričnom sustavu, gdje treba voditi računa o derivaciji jediničnih vektora u cilindričnom sustavu.

### Integrali u cilindričnim koordinatama



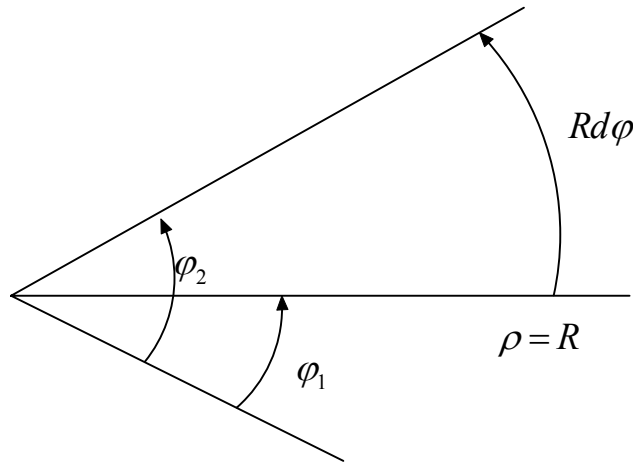
Crt. 30 Diferencijalni linijski elementi u cilindričnom sustavu

Želimo doći do izraza za duljinu prostorne krivulje. Krećemo od linijskog elementa  $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$ , kojeg dijelimo sa  $dt^2$  te, u slučaju kada je krivulja parametrizirana kao  $\mathbf{r}(t) = (\rho(t), \varphi(t), z(t))$ , dobivamo  $\dot{s}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2$ . Duljina prostorne krivulje je

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2} dt$$

Npr. za odsječak kružnice radijusa  $R$  na Crt. 31, linijski element se svodi na

$$\rho|_{\rho=R} d\varphi = R d\varphi, \text{ jer je } d\rho = dz = 0. \text{ Stoga je duljina luka } R \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = R(\varphi_2 - \varphi_1).$$



Crt. 31 Odsječak kružnice

Krivuljni integral možemo prikazati kao sumu jednostrukih integrala

$$\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int (A_\rho d\rho + A_\varphi \rho d\varphi + A_z dz) = \int (A_\rho \dot{\rho} + A_\varphi \rho \dot{\varphi} + A_z \dot{z}) dt$$

Kada je  $\mathbf{A}$  vektorski potencijal magnetskog polja  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , tada Stokesov teorem povezuje krivuljni integral

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

s magnetskim tokom kroz plohu  $S$  koja je ograničena zatvorenom krivuljom, odnosno povezuje krivuljni integral s plošnim integralom. U navedenom je slučaju zgodno iskoristiti cilindričnu simetriju.

#### Primjer 23

##### Tok magnetskog polja

Za konstantno magnetsko polje  $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$  u  $z$ -smjeru, tok kroz kružnicu radijusa  $R$  oko ishodišta u  $xy$  ravnini je očito dan sa  $B\pi R^2$ . Vidjet ćemo što dobivamo sa  $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ . U jednom od prethodnih poglavlja pokazali smo da je  $\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r}$ , gdje je  $\mathbf{r} = R\hat{\mathbf{r}}$ , ali je  $d\mathbf{r} = \rho|_{\rho=R} d\varphi \hat{\boldsymbol{\phi}}$ . Stoga je

$$\mathbf{B} \times \mathbf{r}|_{\rho=R} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\rho}} & \hat{\boldsymbol{\phi}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 0 & 0 & B \\ \rho & 0 & 0 \end{vmatrix}_{\rho=R} = BR\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

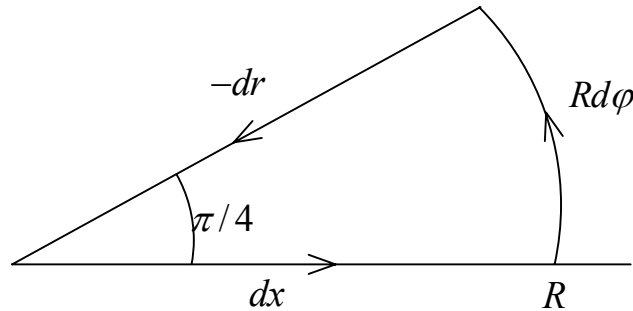
$$\text{pa je sa } \rho=R, \frac{1}{2} \oint_{\rho=R} (\mathbf{B} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2} BR^2 \int_0^{2\pi} d\varphi = B\pi R^2$$

#### Primjer 24

##### Integral rada

Želimo pronaći rad sile  $\mathbf{F} = -\hat{\mathbf{x}} \sin \varphi + \hat{\mathbf{y}} \cos \varphi$  na putu prikazanom na Crt. 32.





Crt. 32 Put integracije

Geometrija problema sugerira upotrebu cilindričnih koordinata. U vektorskoj notaciji

$$\mathbf{\rho} = \rho \hat{\mathbf{\rho}} = (x, y), \quad \hat{\mathbf{\rho}} = \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi.$$

Rad u ovim koordinatama je  $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{\rho}$ , gdje silu  $\mathbf{F}$  i element puta  $d\mathbf{\rho}$  još uvijek treba izraziti kao linearnu kombinaciju  $\hat{\mathbf{\rho}}$  i  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ :

$$d\mathbf{\rho} = d\rho \hat{\mathbf{\rho}} + \rho d\varphi \frac{d\hat{\mathbf{\rho}}}{d\varphi},$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{\rho}}}{d\varphi} = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi.$$

Prethodni izraz se dobije deriviranjem  $\hat{\mathbf{\rho}} = \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi$  po  $\varphi$ . Sada želimo izraziti  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$  preko Cartesijevih jediničnih vektora. Deriviranjem  $1 = \hat{\mathbf{\rho}}^2$  dobijemo  $0 = 2\hat{\mathbf{\rho}} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{\rho}}}{d\varphi}$ .

Iščezavajući skalarni produkt znači da je  $\frac{d\hat{\mathbf{\rho}}}{d\varphi}$  okomit na  $\hat{\mathbf{\rho}}$ , baš kao i na  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ . Kako je  $-\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi$  već jedinični vektor, to znači da mora biti jednak  $\pm \hat{\boldsymbol{\varphi}}$ . Iz geometrije vidimo da je + predznak ispravan. Isti smo rezultat ranije dobili i algebarski.

Primjenjujući ovo razmatranje na silu dolazimo do zaključka da je  $\mathbf{F} = \hat{\boldsymbol{\varphi}}$ , pa stoga radijalni segmenti ne doprinose integralu i jedini neiščezavajući doprinos potječe od luka. Ostaje samo

$$W = \int_0^{\pi/4} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}} \rho d\varphi \Big|_{\rho=R} = R \int_0^{\pi/4} d\varphi = R \frac{\pi}{4}$$

### Primjer 25

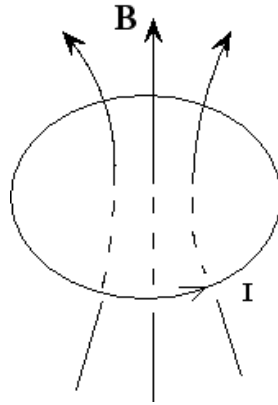
#### Magnetski tok i Stokesov teorem

Kada stacionarna struja  $I$  teče duž duge kružne zavojnice, Oersteadov (Amperov) zakon  $I = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r}$  i geometrija nam kažu da je magnetska indukcija

$\mathbf{B} = B_z \hat{\mathbf{z}}$  usmjerena u z-smjeru (tj. po osi zavojnice). U ovom slučaju cilindrične koordinate su pogodne za formulaciju problema

$$\Phi \equiv \int \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

Zadnja jednakost povezuje magnetski tok kroz jednu petlju zavojnice prikazane na Crt. 33. s krivuljnim integralom vektorskog potencijala duž žice.



Crt. 33 Magnetsko polje kružne zavojnice

$\mathbf{A} = A_\varphi \hat{\boldsymbol{\phi}}$  je različit od nule samo u azimutalnom smjeru. Sa

$$d\boldsymbol{\sigma} = \hat{\mathbf{z}} \rho d\rho d\varphi, \quad d\mathbf{r}|_{\rho=R} = \rho d\varphi \hat{\boldsymbol{\phi}} = R d\varphi \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

dobijemo magnetski tok kroz presjek zavojnice kao

$$\Phi = \int_{\rho=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} B_z \rho d\rho d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} A_\varphi \rho d\varphi|_{\rho=R} = 2\pi R A_\varphi$$

Dakle je  $A_\varphi = \frac{\Phi}{2\pi R}$ .

Slično, u slučaju magnetskog polja ravnog vodiča iz Oerstedevog zakona dobiva se

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2R\pi}$$

### Primjer 26

#### Zakon površina za gibanje planeta

Prvo ćemo u cilindričnim koordinatama iz zakona očuvanja kutne količine gibanja izvesti Keplerov zakon koji kaže da vektor položaja planeta prebrisuje jednake površine u jednakim vremenima.

Razmatramo Sunce u ishodištu kao izvor centralne gravitacijske sile

$\mathbf{F} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$ . Tada je orbitalni angularni moment planeta  $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$  sačuvan jer je moment sile = 0.

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \frac{f(r)}{r} \mathbf{r} \times \mathbf{r} = 0$$

Dakle,  $\mathbf{L} = \text{konst}$ . Sada možemo izabrati koordinatni sustav tako da z-os leži duž smjera vektora orbitalnog angularnog momenta,  $\mathbf{L} = L\hat{\mathbf{z}}$ , te možemo raditi u cilindričnim koordinatama  $\mathbf{r} = (\rho, \varphi, z)$  sa  $z=0$ . Planet se giba u  $xy$ -ravnini jer su  $\mathbf{r}$  i  $\mathbf{v}$  okomiti na  $\mathbf{L}$ .

Stoga možemo razviti brzinu na sljedeći način:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho \frac{d\hat{\boldsymbol{\phi}}}{dt} = \dot{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\dot{\varphi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Koristili smo

$$\frac{d\hat{\mathbf{p}}}{dt} = \frac{d\hat{\mathbf{p}}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\hat{\mathbf{p}} = (\cos \varphi, \sin \varphi), \frac{d\hat{\mathbf{p}}}{d\varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi) = \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Kad uvrstimo izraze za  $\hat{\mathbf{p}}$  i  $\mathbf{v}$  u polarnim koordinatama dobivamo

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = m\rho(\rho\dot{\varphi})(\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\boldsymbol{\phi}}) = m\rho^2\dot{\varphi}\hat{\mathbf{z}} = \text{konst.}$$

Površina koji prebriše radijus-vektor  $\rho$  za vrijeme jedne revolucije planeta je dana sa

$$A = \frac{1}{2} \int \rho(\rho d\varphi) = \frac{1}{2} \int \rho^2 \dot{\varphi} dt = \frac{L}{2m} \int dt = \frac{L\tau}{2m},$$

gdje je  $\tau$  period jedne revolucije planeta.

## Gradijent

Polazna točka u razvoju operatora gradijenta u zakrivljenim koordinatama je geometrijska interpretacija gradijenta. Gradijent je vektor koji ima iznos i smjer maksimalne brzine promjene prostorne funkcije  $\psi$ . Iz ove interpretacije slijedi da je komponenta gradijenta  $\nabla\psi(\rho, \varphi, z)$  koja je okomita na familiju ploha  $\rho = \text{konst.}$  dana sa

$$\hat{\mathbf{p}} \cdot \nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \rho},$$

iz razloga što ovo predstavlja brzinu promjene  $\psi$  kada se mijenja  $\rho$ , a da su pri tome  $\varphi$  i  $z$  fiksni.  $\varphi$ -komponenta gradijenta u cilindričnim koordinatama ima oblik

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \nabla \psi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}$$

jer je kutni linijski element  $ds_\varphi = \rho d\varphi$ . Kada isti postupak ponovimo za  $z$ -koordinatu i vektorski zbrojimo sve doprinose dobijemo

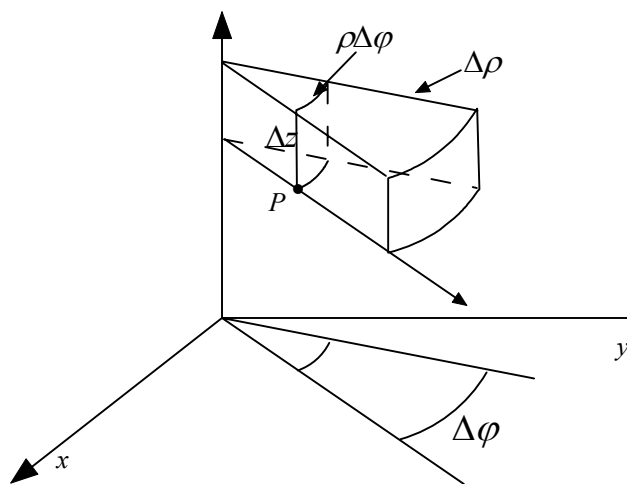
$$\nabla \psi(\rho, \varphi, z) = \hat{\mathbf{p}} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (2.2)$$

## Divergencija

Operator divergencije u cilindričnim koordinatama može se dobiti iz integralne definicije ili iz Gaussovog teorema. Mi ćemo koristiti integralnu definiciju:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\int \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma}}{\Delta\tau}$$

gdje je mali volumen dan izrazom  $\Delta\tau = \rho\Delta\rho\Delta\varphi\Delta z$  (Crt. 34). Primijetite da su pozitivni smjerovi izabrani tako da  $(\rho, \varphi, z)$  ili  $(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\mathbf{z}})$  tvore desno orijentirani sustav,  $\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\mathbf{z}}$ .



**Crt. 34** Diferencijalni volumni element u cilindričnim koordinatama

Plošni integral za dvije stranice  $\rho = \text{konst.}$  na Crt. 34 dan je sa

$$\left[ V_{\rho} \rho + \frac{\partial}{\partial \rho} (V_{\rho} \rho) \Delta \rho \right] \Delta z \Delta \varphi - V_{\rho} \rho \Delta \Delta \varphi = \frac{\partial}{\partial \rho} (V_{\rho} \rho) \Delta \rho \Delta \varphi \Delta z$$

Ovdje smo koristili činjenicu da je za stranicu koja je dalje od ishodišta  $\Delta \sigma = \rho|_{\rho+\Delta \rho} \Delta \varphi \Delta z \hat{\rho}$ , a za bližu stranicu  $\Delta \sigma = -\rho|_{\rho} \Delta \varphi \Delta z \hat{\rho}$ ,  $V_{\rho} = \mathbf{V} \cdot \hat{\rho}$  komponenta vektora  $\mathbf{V}$  u smjeru  $\hat{\rho}$ . Također smo za stranicu koja je dalje od ishodišta koristili razvoj u Maclaurinov red.

Dodajući na analogan način doprinose za druge dvije površine dobijemo za mali volumen  $\Delta \tau = \rho \Delta \rho \Delta \varphi \Delta z$

$$\int \mathbf{V}(\rho, \varphi, z) \cdot d\sigma = \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (V_{\rho} \rho) + \frac{\partial}{\partial \varphi} V_{\varphi} + \frac{\partial}{\partial z} (V_z \rho) \right] \Delta \rho \Delta \varphi \Delta z$$

Dijeljenjem s malim volumenom dobivamo, u granici kada  $\Delta \tau \rightarrow 0$ ,

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (V_{\rho} \rho) + \frac{\partial}{\partial \varphi} V_{\varphi} + \frac{\partial}{\partial z} (V_z \rho) \right] \quad (2.3)$$

Laplacijan možemo dobiti kombiniranjem (2.2) i (2.3) gdje uvrštavamo  $\mathbf{V} = \nabla \psi(\rho, \varphi, z)$ . To nas vodi na

$$\nabla \cdot \nabla \psi(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right]$$

### Rotacija

Da bismo došli do izraza za rotaciju u cilindričnim koordinatama primijenit ćemo Stokesov teorem. Slično kao u slučaju divergencije promotrit ćemo limes kada površina postaje iščezavajuće mala. Pogledat ćemo mali površinski element na zakrivljenoj plohi u slučaju kada je  $\rho = \text{konst.}$  Za tako malu površinu teorem o srednjoj

vrijednosti integralnog računa nam kaže da je integral dan kao površina pomnožena sa srednjom vrijednosti funkcije na maloj plohi. Stoga, krećući od

$$\int_S \nabla \times \mathbf{V} |_{\rho} \cdot d\boldsymbol{\sigma}_{\rho} = \hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) \rho \Delta\varphi \Delta z$$

Stokesov teorem nam daje

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) \rho \Delta\varphi \Delta z = \oint \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}, \quad (2.4)$$

gdje krivuljni integral leži na plohi  $\rho = \text{konst.}$  Slijedeći petlju na Crt. 35 imamo

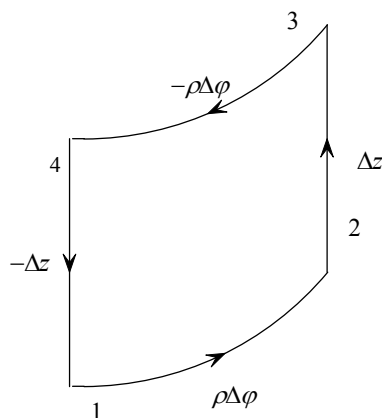
$$\begin{aligned} \oint \mathbf{V}(\rho, \varphi, z) \cdot d\mathbf{r} &= V_{\varphi} \rho \Delta\varphi + \left[ V_z + \frac{\partial}{\partial \varphi} (V_z) \Delta\varphi \right] \Delta z \\ &\quad - \left[ V_{\varphi} \rho + \frac{\partial}{\partial z} (V_{\varphi} \rho) \Delta z \right] \Delta\varphi - V_z \Delta z \\ &= \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi} (V_z) - \frac{\partial}{\partial z} (V_{\varphi} \rho) \right] \Delta\varphi \Delta z \end{aligned} \quad (2.5)$$

+ predznak se dobije idući u pozitivnom smjeru na dijelovima 1 i 2, a na dijelovima 3 i 4 se dobije – predznak jer se ide u negativnom smjeru. Članove višeg reda u razvoju možemo zanemariti. Oni će iščeznuti u granici kada površina iščezava ( $\Delta\varphi \rightarrow 0$ ,  $\Delta z \rightarrow 0$ ). Kombinirajući relacije (2.4) i (2.5), u granici kada površina iščezava dobivamo

$$\nabla \times \mathbf{V} |_{\rho} = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi} (V_z) - \frac{\partial}{\partial z} (V_{\varphi} \rho) \right]$$

Preostale dvije komponente  $\nabla \times \mathbf{V}$  dobiju se na sličan način. Zgodno je prikazati rotaciju u obliku determinante

$$\nabla \times \mathbf{V} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\rho}} & \rho \hat{\boldsymbol{\phi}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_{\rho} & \rho V_{\varphi} & V_z \end{vmatrix}.$$

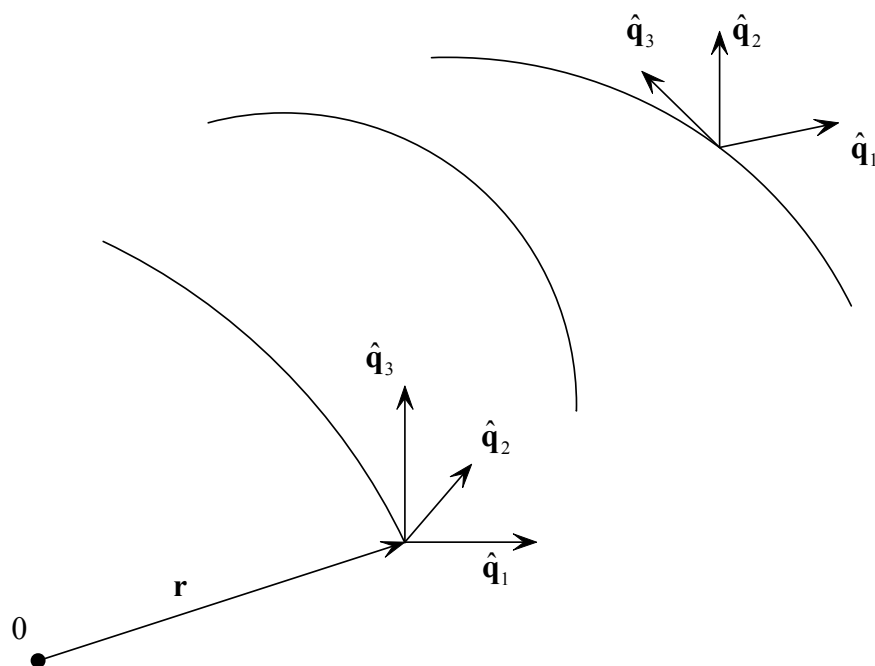


Crt. 35 Površinski element za  $\rho = \text{konst.}$

Geometrijska interpretacija gradijenta te korištenje diferencijalne definicije divergencije i Stokesovog teorema omogućili su nam da dođemo do ovih formula bez deriviranja jediničnih vektora  $\hat{\rho}$  i  $\hat{\phi}$ .

## Ortogonalne koordinate

U razmatranju Cartezijevih koordinata pojavljivale su se tri familije međusobno okomitih ravnina:  $x=\text{konst.}$ ,  $y=\text{konst.}$ ,  $z=\text{konst.}$ . Zamislite da na ovaj sustav dodate tri nove familije ploha  $q_i(x,y,z)=\text{konst.}$ ,  $i=1,2,3$ . Plohe bilo koje familije ne moraju biti međusobno paralelne i ne trebaju biti ravnine. U vizualizaciji može pomoći Crt. 36.



Crt. 36 Zakrivljene koordinate  $q_i$  s promjenjivim smjerovima  $\hat{q}_i$ .

Iako tri nove familije ploha ne trebaju biti međusobno okomite, mi ćemo kasnije uvesti taj uvjet radi jednostavnosti. Ortogonalnost ima mnogo prednosti: lokalno okomite koordinate su nalik Cartesijevim koordinatama: površine i volumeni produkti su diferencijala koordinata, a dvodimenzionalno se gibanje može podijeliti u analogone jednodimenzionalnih radijalnih i kutnih komponenti. U ovom poglavlju razvijamo opći formalizam zakrivljenih koordinata. Iz geometrije ortogonalnih koordinata izvest ćemo diferencijale koordinata, koje ćemo koristiti za linijske, površinske i volumne elemente u višestrukim integralima.

Bilo koju točku  $(x,y,z)$  možemo opisati kao presjek triju ravnina u Cartesijevom sustavu ili kao presjek tri plohe u novim, zakrivljenim koordinatama. Ako opišemo koordinatne plohe sa  $q_1=\text{konst.}$ ,  $q_2=\text{konst.}$ ,  $q_3=\text{konst.}$  tada možemo identificirati našu točku sa  $(q_1,q_2,q_3)$  isto kao što je možemo prikazati i sa  $(x,y,z)$ . To znači da možemo izraziti  $x,y,z$  preko  $q$ -ova:

Općenite zakrivljene koordinate  
koordinate

$$\begin{aligned} & q_1, q_2, q_3 \\ x &= x(q_1, q_2, q_3) \\ y &= y(q_1, q_2, q_3) \\ z &= z(q_1, q_2, q_3) \end{aligned}$$

Ova transformacija je invertibilna ako je Jacobijan [5]

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{vmatrix}$$

različit od nule []. U tom slučaju,

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1(x, y, z) \\ q_2 &= q_2(x, y, z) \\ q_3 &= q_3(x, y, z) \end{aligned}$$

Kružne cilindrične

$$\begin{aligned} & \rho, \varphi, z \\ -\infty < x &= \rho \cos \varphi < \infty \\ -\infty < y &= \rho \sin \varphi < \infty \\ -\infty < z &< \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 \leq \rho &= (x^2 + y^2)^{1/2} < \infty \\ 0 \leq \varphi &= \arctg(y/x) < 2\pi \\ -\infty < z &< \infty \end{aligned}$$

Svakoj familiji ploha  $q_i = \text{konst.}$  odgovara jedinični vektor  $\hat{q}_i$  koji je okomit na plohu  $q_i = \text{konst.}$  i usmjeren u smjeru porasta  $q_i$ . Budući da okomica na plohu može bit usmjerena u različitim pravcima, ovisno o položaju, jedinični vektori  $\hat{q}_i$  ovisit će o položaju u prostoru.

Vektor položaja, kao i neki vektor  $\mathbf{V}$  mogu se napisati kao:

$$\mathbf{r} = \hat{q}_1 q_1 + \hat{q}_2 q_2 + \hat{q}_3 q_3, \quad \mathbf{V} = \hat{q}_1 V_1 + \hat{q}_2 V_2 + \hat{q}_3 V_3$$

Vektori  $\hat{q}_i$  su normirani,  $\hat{q}_i^2 = 1$ , te čine desni koordinatni sustav volumena  $\hat{q}_1 \cdot (\hat{q}_2 \times \hat{q}_3) = 1$ .

Stoga za naći diferencijalni element pomaka treba izračunati

$$dx = \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} dq_3.$$

i slično  $y(q_1, q_2, q_3)$  i  $z(q_1, q_2, q_3)$ , tj.

$$d\mathbf{r} = \sum_i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} dq_i.$$

U zakrivljenim koordinatama najopćenitiji oblik za element kvadrata udaljenosti može se napisati u kvadratičnom obliku:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{11} dq_1^2 + g_{12} dq_1 dq_2 + g_{13} dq_1 dq_3 \\ &+ g_{21} dq_2 dq_1 + g_{22} dq_2^2 + g_{23} dq_2 dq_3 \\ &+ g_{31} dq_3 dq_1 + g_{32} dq_3 dq_2 + g_{33} dq_3^2 \\ &= \sum_{ij} g_{ij} dq_i dq_j \end{aligned} \tag{2.6}$$

gdje miješani članovi  $dq_i dq_j$ , sa  $i \neq j$  pokazuju da te koordinate nisu ortogonalne. Prostori za koje je (2.6) definicija udaljenosti nazivaju se metrički ili Riemannovi. Uvrštavajući kvadrate izraza za  $dx$ ,  $dy$  i  $dz$  u relaciju (2.6) i izjednačavajući članove uz

$dq_i dq_j$  ( $dq$  su proizvoljni; tako npr. možemo staviti da je  $dq_2=dq_3=0$  i tako izolirati  $g_{11}$ ) dobijamo

$$g_{ij} = \frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{\partial z}{\partial q_j} = \sum_l \frac{\partial x_l}{\partial q_i} \frac{\partial x_l}{\partial q_j}. \quad (2.7)$$

Koeficijenti  $g_{ij}$  određuju prirodu koordinatnog sustava ( $q_1, q_2, q_3$ ). Kad kažemo metrika onda mislimo na skup svih koeficijenata  $g_{ij}$  koji čine metrički tenzor. U općoj teoriji relativnosti osobine materije određuju metričke komponente, tj.  $g_{ij}$  su rješenja Einsteinove nelinearne jednadžbe polja. Geometrija je tako spojena s fizikom.

Od ove točke pa nadalje, ograničit ćemo se na **ortogonalne** koordinatne sustave (koje definiraju međusobno okomite plohe, ili ekvivalentno koje definira suma kvadrata u  $ds^2$ ), što znači:

$$g_{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad \text{ili} \quad \hat{\mathbf{q}}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_j = \delta_{ij} \quad (2.8)$$

Kako bismo pojednostavnili notaciju pišemo  $g_{ii} = h_i^2$  tako da je

$$ds^2 = (h_1 dq_1)^2 + (h_2 dq_2)^2 + (h_3 dq_3)^2 = \sum_l (h_l dq_l)^2 \quad (2.9)$$

Posebni koordinatni sustavi koje ćemo razmatrati opisani su s faktorima  $h_1, h_2, h_3$ . S druge strane, faktore  $h_1, h_2, h_3$  možemo prepoznati i iz diferencijalnih linijskih elemenata

$$ds_i = h_i dq_i \quad (2.10)$$

za bilo koji dani  $q_i$  pri čemu su svi drugi  $q$ -ovi konstantni. Primijetimo da tri zakrivljene koordinate  $q_i$  ne moraju nužno biti duljine. Faktori  $h_i$  mogu ovisiti o  $q$ -ovima i imati neku dimenziju. Produkt  $h_i dq_i$  mora imati dimenziju duljine i biti pozitivan. U poglavlju o cilindričnim koordinatama smo pokazali da je  $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$  pa slijedi da je  $h_\rho = 1, h_\varphi = \rho, h_z = 1$ .

Relacija (2.7) može se napisati i kao produkt tangencijalnih vektora

$$g_{ij} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}$$

pa nam relacije ortogonalnosti (2.8) zajedno sa sumom kvadrata u relaciji (2.9) kažu da za svaki pomak duž koordinatnih osi vrijedi

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = h_i \hat{\mathbf{q}}_i.$$

Soga se diferencijalni vektor udaljenosti  $d\mathbf{r}$  može napisati kao

$$d\mathbf{r} = \sum_i h_i dq_i \hat{\mathbf{q}}_i = \sum_i h_i d\mathbf{q}_i \quad (2.11)$$

Sada možemo napisati krivuljni integral u zakrivljenim koordinatama

$$\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \sum_i \int V_i h_i dq_i.$$

Rad  $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  koji izvrši sila  $\mathbf{F}$  duž linijskog elementa  $d\mathbf{r}$  je najpoznatiji primjer krivuljnog integrala u fizici. U tom kontekstu često koristimo lančano pravilo u obliku

$$\int_{\mathbf{r}(t_1)}^{\mathbf{r}(t_2)} \mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt \quad (2.12)$$



**Primjer 27**

**Očuvanje energije za konzervativne sile**

Relacija (2.12) za silu  $\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$  u kombinaciju s Newtonovom jednačinom gibanja za česticu mase  $m$  omogućava nam da analitički integriramo rad

$$\int_{\mathbf{r}(t_1)}^{\mathbf{r}(t_2)} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathbf{v}^2}{dt} dt = \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{m}{2} [\mathbf{v}^2(t_2) - \mathbf{v}^2(t_1)]$$

i dobijemo razliku kinetičkih energija. Ako se sila može prikazati kao negativni gradijent potencijala  $\mathbf{F} = -\nabla V$ , tada takav krivoljni integral možemo eksplicitno integrirati

$$\int_{\mathbf{r}(t_1)}^{\mathbf{r}(t_2)} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\mathbf{r}(t_1)}^{\mathbf{r}(t_2)} \nabla V(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -V \Big|_{\mathbf{r}(t_1)}^{\mathbf{r}(t_2)} = -[V(\mathbf{r}(t_2)) - V(\mathbf{r}(t_1))]$$

i rad identificirati s negativnom razlikom potencijala. Uspoređujući oba izraza za rad dobivamo relaciju očuvanja energije

$$\frac{m}{2} \mathbf{v}^2(t_2) + V(\mathbf{r}(t_2)) = \frac{m}{2} \mathbf{v}^2(t_1) + V(\mathbf{r}(t_1))$$

u slučaju konzervativnih sila. O neovisnosti rada o putu već smo raspravljali u poglavlju o konzervativnim silama. Dakle, u ovom slučaju samo krajnje točke puta su bitne.

U Cartesijevim koordinatama **duljina prostorne krivulje** je dana sa  $\int ds$ , gdje je  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ . Ako je prostorna krivulja u zakrivljenim koordinatama parametrizirana kao  $(q_1(t), q_2(t), q_3(t))$ , njenu duljinu možemo pronaći integriranjem linijskih elemenata danih relacijom (2.9). Korištenjem pravila o lančanom deriviranju dobivamo,

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{h_1^2 \left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 + h_2^2 \left(\frac{dq_2}{dt}\right)^2 + h_3^2 \left(\frac{dq_3}{dt}\right)^2} dt$$

Iz relacije (2.10) odmah razvijamo površinske i volumne elemente

$$d\sigma_{ij} = ds_i ds_j = h_i h_j dq_i dq_j$$

$$d\tau = ds_1 ds_2 ds_3 = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$$

Površinski se element može razvit kao:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\sigma} &= ds_2 ds_3 \hat{\mathbf{q}}_1 + ds_3 ds_1 \hat{\mathbf{q}}_2 + ds_1 ds_2 \hat{\mathbf{q}}_3 \\ &= h_2 h_3 dq_2 dq_3 \hat{\mathbf{q}}_1 + h_3 h_1 dq_3 dq_1 \hat{\mathbf{q}}_2 + h_1 h_2 dq_1 dq_2 \hat{\mathbf{q}}_3 \end{aligned}$$

Stoga, plošni integral postaje

$$\int \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int V_1 h_2 h_3 dq_2 dq_3 + \int V_2 h_3 h_1 dq_3 dq_1 + \int V_3 h_1 h_2 dq_1 dq_2$$

Primijetimo da je vektorska algebra jednaka u zakrivljenim ortogonalnim i Cartesijevim koordinatama. Posebno, skalarni produkt je

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{i,k} A_i \hat{\mathbf{q}}_i \cdot B_k \hat{\mathbf{q}}_k = \sum_{i,k} A_i \cdot B_k \delta_{ik} = \sum_i A_i \cdot B_i,$$

a indeks označava zakrivljenu koordinatu. Za vektorski produkt imamo

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \sum_{i,k} A_i \hat{\mathbf{q}}_i \times B_k \hat{\mathbf{q}}_k = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{q}}_1 & \hat{\mathbf{q}}_2 & \hat{\mathbf{q}}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

### Primjer 28

#### Orbitalni impuls vrtnje u cilindričnim koordinatama

U cilindričnim koordinatama radij-vektor položaja dan je sa  $\mathbf{r} = \rho \hat{\mathbf{p}} + z \hat{\mathbf{z}}$ , a brzina sa  $\mathbf{v} = \dot{\rho} \hat{\mathbf{p}} + \rho \dot{\phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \dot{z} \hat{\mathbf{z}}$  pa imamo

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{p}} & \hat{\boldsymbol{\phi}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \rho & 0 & z \\ \dot{\rho} & \rho \dot{\phi} & \dot{z} \end{vmatrix}$$

Sada uzmimo da je masa predmeta jednaka 3 kg, predmet udaljen 1m u radijalnom smjeru  $xy$ -ravnine, a brzina neka je 2m/s u  $z$ -smjeru. Tada očekujemo da će  $\mathbf{L}$  biti u smjeru  $\hat{\boldsymbol{\phi}}$  i kvantitativno

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = 3 \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{p}} & \hat{\boldsymbol{\phi}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -6 \hat{\boldsymbol{\phi}} \text{ mkg/s}$$

Do sada smo razmatrali lokalno pravokutne koordinate koje su bile prilagođene posebnim simetrijama. Promotrimo na trenutak općenitiji slučaj u kojemu koordinate nisu nužno ortogonalne. Kod ortogonalnih koordinata površinski i volumni elementi su jednostavno bili produkti linijskih elemenata  $h_i dq_i$ . U općenitom slučaju koristit ćemo geometrijsko značenje  $\partial \mathbf{r} / \partial q_i$  (tangencijalni vektori). Počet ćemo s Cartesijevim površinskim elementom  $dxdy = dA_{xy}$  koji nastaje tako da se promotri mreža ravnih linija koje su paralelne  $x$  i  $y$  osi. U novim zakrivljenim koordinatama površinski element  $dA_{q_1 q_2}$  neće općenito imati isti oblik, ali to nije važno jer se oba elementa smatraju infinitezimalno malim, a smatramo da integrand na njima ima konstantnu vrijednost. Zbog infinitezimalno male veličine taj će element općenito imati oblik paralelograma. Kako bismo pronašli vezu između  $dA_{xy}$  i  $dA_{q_1 q_2}$  promotrit ćemo infinitezimalni pravokutnik kojeg čine dva vektora pomaka u zakrivljenim koordinatama

$$d\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(q_1 + dq_1, q_2) - \mathbf{r}(q_1, q_2) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} dq_1$$

$$d\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(q_1, q_2 + dq_2) - \mathbf{r}(q_1, q_2) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} dq_2$$

Primijetimo da je taj pravokutnik dio mreže koju čine linije  $q_1 = \text{konst.}$  i  $q_2 = \text{konst.}$  Površina pravokutnika je  $z$ -komponenta vektorskog produkta dva prethodno definirana tangencijalna vektora pomaka pa je

$$\begin{aligned}
 dxdy &= d\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_2 \Big|_z = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & -\frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_1} \end{bmatrix} dq_1 dq_2 \\
 &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} \end{vmatrix} dq_1 dq_2
 \end{aligned}$$

Transformacijski se koeficijent u obliku determinante naziva Jacobijan.

Slično, volumni element  $dxdydz$  postaje mješoviti produkt tri infinitezimalna vektora pomaka  $d\mathbf{r}_i = dq_i \hat{\mathbf{r}}_i / \partial q_i$  usmjerena duž  $q_i$  smjerova  $\hat{\mathbf{q}}_i$  i ima oblik

$$dxdydz = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{vmatrix} dq_1 dq_2 dq_3$$

Determinanta se i ovdje zove Jacobijan.

U slučaju ortogonalnih koordinata Jacobijan se pojednostavljuje u produkt ortogonalnih vektora (2.11). Npr. prethodna relacija postaje

$$h_1 h_2 h_3 (\hat{\mathbf{q}}_1 \times \hat{\mathbf{q}}_2) \cdot \hat{\mathbf{q}}_3 = h_1 h_2 h_3$$

### Primjer 3. Jacobijan za polarne koordinate

Ilustrirat ćemo transformaciju Cartesijevog dvodimenzionalnog volumnog elementa  $dxdy$  u polarne koordinate  $\rho, \varphi$  sa  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ . Ovdje je

$$dxdy = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} d\rho d\varphi = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} d\rho d\varphi = \rho d\rho d\varphi.$$

## Diferencijalni vektorski operatori

### Gradijent

Gradijent je vektora koji ima iznos i smjer maksimalne prostorne promjene funkcije  $\psi$ . Iz ove geometrijske interpretacije slijedi da je komponenta  $\nabla \psi(q_1, q_2, q_3)$  u smjeru okomitom na familiju ploha  $q_1 = \text{konst.}$  dana sa

$$\hat{\mathbf{q}}_1 \cdot \nabla \psi = \nabla \psi \Big|_1 = \frac{\partial \psi}{\partial s_1} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1}.$$

Prethodna relacija opisuje promjenu  $\psi$  kada mijenjamo  $q_1$ , a držimo  $q_2$  i  $q_3$  fiksima. Veličina  $ds_1$  je diferencijalna duljina u smjeru povećavanja  $q_1$ . U prethodnoj cjelini smo uveli  $\hat{\mathbf{q}}_1$  da bismo naznačili taj smjer. Ponavljajući ovaj postupak za  $q_2$  i  $q_3$  i zbrajajući vektorski dobivamo

$$\begin{aligned}\nabla \psi &= \hat{\mathbf{q}}_1 \frac{\partial \psi}{\partial s_1} + \hat{\mathbf{q}}_2 \frac{\partial \psi}{\partial s_2} + \hat{\mathbf{q}}_3 \frac{\partial \psi}{\partial s_3} \\ &= \hat{\mathbf{q}}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \hat{\mathbf{q}}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} + \hat{\mathbf{q}}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_3} \\ &= \sum_i \hat{\mathbf{q}}_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i}\end{aligned}$$

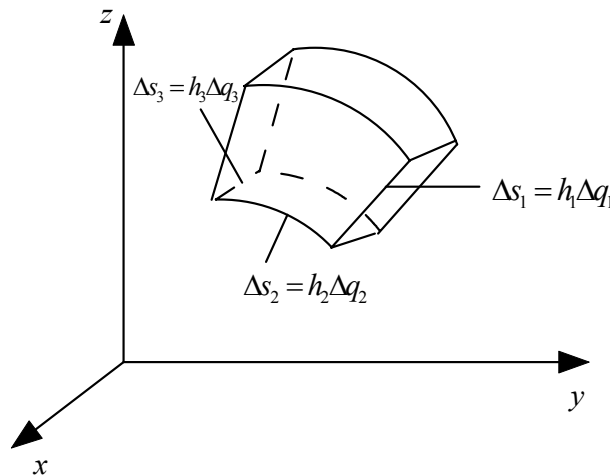
Uvrštavajući za cilindrični sustav  $h_\rho = 1$ ,  $h_\varphi = \rho$ ,  $h_z = 1$  možemo provjeriti da se dobiva već izvedena relacija za gradijent u cilindričnim koordinatama.

### Divergencija

Operator divergencije ćemo dobiti iz integralne definicije.

$$\nabla \cdot \mathbf{V}(q_1, q_2, q_3) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\int \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma}}{\Delta\tau}$$

gdje je mali volumen  $\Delta\tau = h_1 h_2 h_3 \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3$ . Pozitivni smjerovi su izabrani tako da  $(q_1, q_2, q_3)$  čine desni koordinatni sustav  $\hat{\mathbf{q}}_1 \cdot (\hat{\mathbf{q}}_2 \times \hat{\mathbf{q}}_3) = 1$ . Plošni integral za dvije stranice s  $q_1 = \text{konst.}$  (Crt. 37) dan je sa



Crt. 37 Element volumena u ortogonalnim koordinatama

$$\left[ V_1 h_2 h_3 + \frac{\partial}{\partial q_1} (V_1 h_2 h_3) \Delta q_1 \right] \Delta q_2 \Delta q_3 - V_1 h_2 h_3 \Delta q_2 \Delta q_3 = \frac{\partial}{\partial q_1} (V_1 h_2 h_3) \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3$$

U izvodu su korištene iste aproksimacije kao i u prethodnim izvodima divergencije.  $V_i$  je komponenta  $\mathbf{V}$  u  $\hat{\mathbf{q}}_i$ -smjeru;  $\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{q}}_i = V_i$ . Dodajući slične izraze za ostale plohe dobivamo

$$\int \mathbf{V}(q_1, q_2, q_3) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (V_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (V_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (V_3 h_1 h_2) \right] \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3.$$

Dijeljenjem s malim volumenom  $\Delta\tau$ , u granici kada  $\Delta\tau \rightarrow 0$ , dobivamo

$$\nabla \cdot \mathbf{V}(q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (V_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (V_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (V_3 h_1 h_2) \right].$$

Kombiniranjem izraza za gradijent i divergenciju ( $\mathbf{V} = \nabla \psi(q_1, q_2, q_3)$ ) dobivamo Laplacijan

$$\nabla \cdot \nabla \psi(q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_3} \right) \right].$$

### Rotacija

Da bismo dobili izraz za rotaciju u zakrivljenim koordinatama primjenjujemo Stokesov teorem na mali površinski element i promatramo granicu kada površina tog elementa teži u nulu. Radeći na jednoj po jednoj komponenti promotrit ćemo malu plohu za  $q_1 = \text{konst.}$  Za tako malu površinu teorem o srednjoj vrijednosti kaže da je integral dan kao srednja vrijednost funkcije puta površina. Stoga, iz

$$\int_S \nabla \times \mathbf{V} \big|_l \cdot d\boldsymbol{\sigma}_1 = \hat{\mathbf{q}}_1 \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) h_2 h_3 \Delta q_2 \Delta q_3$$

Stokesov teorem daje

$$\hat{\mathbf{q}}_1 \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) h_2 h_3 \Delta q_2 \Delta q_3 = \oint \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.13)$$

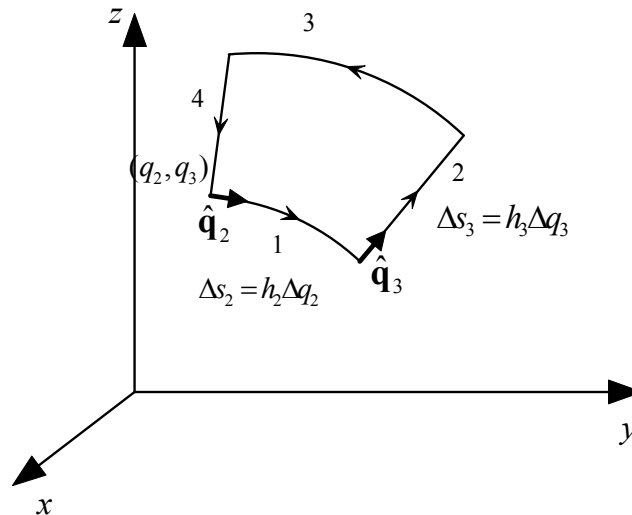
gdje krivuljni integral leži na plohi  $q_1 = \text{konst.}$  Slijedeći petlju na Crt. 38 (1,2,3,4) dobivamo

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{V}(q_1, q_2, q_3) \cdot d\mathbf{r} &= V_2 h_2 \Delta q_2 + \left[ V_3 h_3 + \frac{\partial}{\partial q_2} (V_3 h_3) \Delta q_2 \right] \Delta q_3 \\ &\quad - \left[ V_2 h_2 + \frac{\partial}{\partial q_3} (V_2 h_2) \Delta q_3 \right] \Delta q_2 - V_3 h_3 \Delta q_3 \\ &= \left[ \frac{\partial}{\partial q_2} (V_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (V_2 h_2) \right] \Delta q_2 \Delta q_3 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Pozitivan predznak se dobije kad se ide u pozitivnom smjeru na dijelovima 1 i 2, a negativan na 3 i 4. Članovi višeg reda su zanemareni. Oni će iščeznuti u granici kada površina teži u 0 ( $\Delta q_2 \rightarrow 0, \Delta q_3 \rightarrow 0$ ).

Kombinirajući relacije (2.13) i (2.14), u granici kada površina teži u nulu, dobijemo

$$\nabla \times \mathbf{V} \big|_l = \frac{1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_2} (V_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (V_2 h_2) \right]$$



Crt. 38 Mala petlja u ortogonalnim koordinatama

Preostale komponente rotacije mogu se dobiti cikličkom permutacijom indeksa. Izraz za rotaciju u ortogonalnim koordinatama može se zapisati u obliku determinante

$$\nabla \times \mathbf{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{q}}_1 h_1 & \hat{\mathbf{q}}_2 h_2 & \hat{\mathbf{q}}_3 h_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 V_1 & h_2 V_2 & h_3 V_3 \end{vmatrix}.$$

### Sferne koordinate

Ortogonalne koordinate  $(q_1, q_2, q_3)$  su u ovom posebnom slučaju  $(r, \theta, \varphi)$ . Sferni koordinatni sustav se tako sastoji od slijedećeg:

1. Koncentričnih sfera sa središtem u ishodištu

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = konst.$$

2. Desnih kružnih stožaca čiji je centar na  $z$ -(polarnoj) osi, a vrhovi u ishodištu

$$\theta = \arccos \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = konst.$$

3. Poluravnina kroz  $z$ -(polarnu) os,

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x} = konst.$$

$\theta$  se ponekad naziva polarni kut, a  $\varphi$  azimutalni. Jednadžbe transformacije koje odgovaraju prethodnim relacijama su

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

gdje se  $\theta$  mjeri od pozitivne  $z$ -osi, a  $\varphi$  se mjeri u  $xy$ -ravnini krećući od pozitivne  $x$ -osi. Raspon vrijednosti je  $0 \leq r < \infty$ ,  $0 \leq \theta < \pi$  i  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Za  $r=0$ ,  $\theta$  i  $\varphi$  su

nedefinirani. Vektor položaja u odnosu na ishodište je:  $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ . Iz relacija

$$h_i^2 = \sum_l \left( \frac{\partial x_l}{\partial q_i} \right)^2 \quad \text{i} \quad ds_i = h_i dq_i \quad \text{slijedi}$$

$$h_1 = h_r = 1$$

$$h_2 = h_\theta = r$$

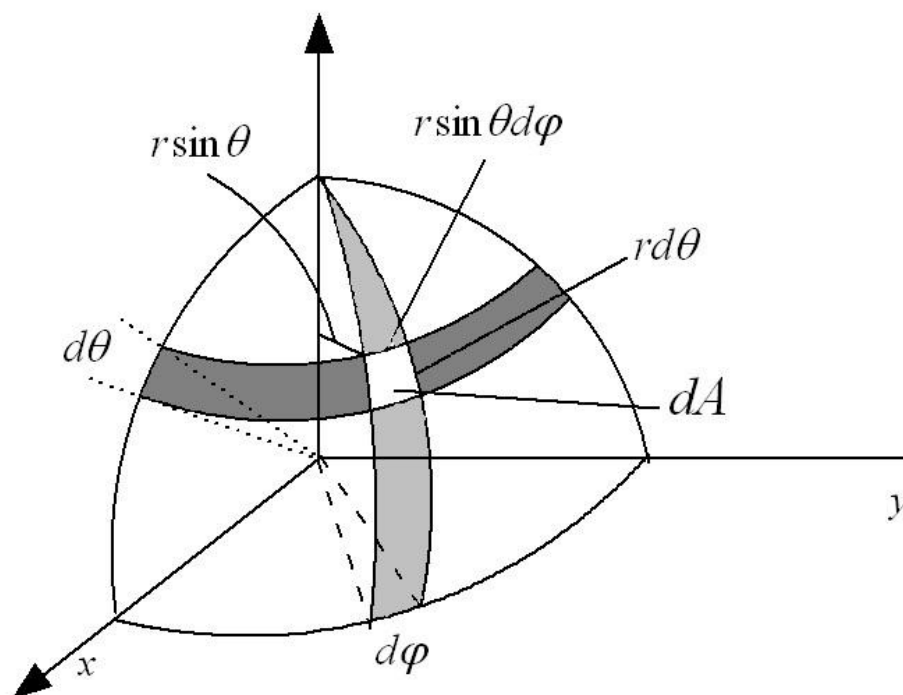
$$h_3 = h_\varphi = r \sin \theta$$

te relacija za (vektorski) linijski element

$$d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}}dr + \hat{\boldsymbol{\theta}}rd\theta + \hat{\boldsymbol{\phi}}r \sin \theta d\varphi.$$

Zbog ortogonalnost jediničnih vektora

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$



Crt. 39 Sferni koordinatni sustav

U sfernom koordinatnom sustavu, površinski element (za  $r = \text{konst.}$ ) je

$$dA = d\sigma_{\theta\varphi} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi,$$

(na Crt. 39 prikazan je kao neosjenčana površina). Integriranjem po azimutalnom kutu  $\varphi$ , površinski element postaje prsten širine  $d\theta$ .  $dA = 2\pi r^2 \sin \theta d\theta$ . Ovaj oblik će se često pojavljivati u problemima koji imaju azimutalnu simetriju, a rješavaju se u sfernim koordinatama. Po definiciji prostornih radijana ili steradijana (1 steradian je kut stošca s vrhom u središtu kugle, koji na plohi kugle omeđuje površinu  $r^2$ ; pošto kugla ima površinu  $4\pi r^2$  to znači da kugla ima  $4\pi$  steradijana), element prostornog kuta  $d\Omega$  dan je sa

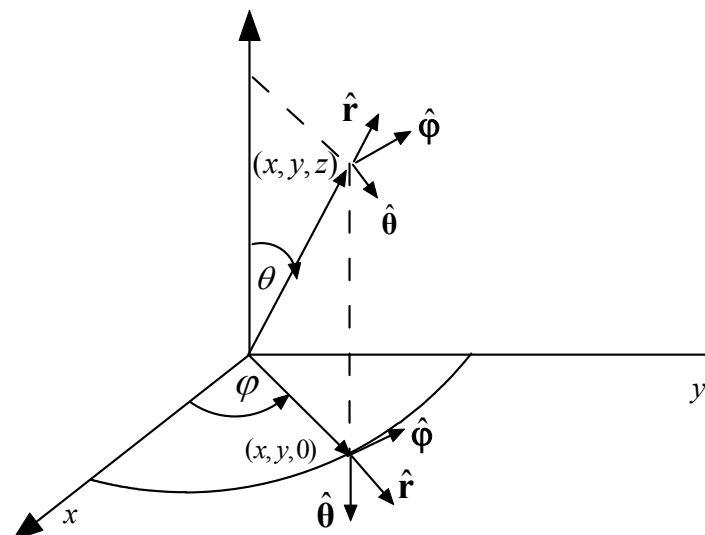
$$d\Omega = \frac{dA}{r^2} = \sin \theta d\theta d\varphi = |d(\cos \theta) d\varphi|$$

Integrirajući po cijeloj sfernoj plohi dobivamo

$$\int d\Omega = 4\pi.$$

Volumni element u sfernim koordinatama je po relaciji  $d\tau = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$  dan izrazom:

$d\tau = r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi = r^2 dr d\Omega$ . Jedinični vektori u sfernim koordinatama prikazani su na Crt. 40.



Crt. 40 Jedinični vektori u sfernim koordinatama

Potrebno je naglasiti da sva tri jedinična vektora mijenjaju smjer s promjenom kutova  $\theta$  i  $\varphi$ . Posebno, derivacije jediničnih vektora po  $\theta$  i  $\varphi$  ne iščezavaju. Kad se deriviraju vektori u sfernim koordinatama nikako se ne smije zaboraviti derivacija jediničnih vektora. Izraženo preko Cartesijevih jediničnih koordinatnih vektora, jedinični koordinatni vektori sfernog sustava su:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}} &= \hat{\mathbf{x}} \sin \theta \cos \varphi + \hat{\mathbf{y}} \sin \theta \sin \varphi + \hat{\mathbf{z}} \cos \theta \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \hat{\mathbf{x}} \cos \theta \cos \varphi + \hat{\mathbf{y}} \cos \theta \sin \varphi - \hat{\mathbf{z}} \sin \theta . \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} &= -\hat{\mathbf{x}} \sin \varphi + \hat{\mathbf{y}} \cos \varphi\end{aligned}$$

Dani vektor može se izraziti na mnogo različitih (ali ekvivalentnih načina). Npr. vektor položaja  $\mathbf{r}$  može se napisati kao

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= r\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}}(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \\ &= \hat{\mathbf{x}}x + \hat{\mathbf{y}}y + \hat{\mathbf{z}}z \\ &= \hat{\mathbf{x}} \sin \theta \cos \varphi + \hat{\mathbf{y}} \sin \theta \sin \varphi + \hat{\mathbf{z}} \cos \theta\end{aligned}$$

Izabiremo onaj oblik koji najbolje odgovara problemu kojeg rješavamo, tj.  $r$  u sfernim koordinatama, drugi oblik u Cartesijevim koordinatama i treći oblik kada prelazimo iz Cartesijevih u sferne koordinate.

Promjenom oznaka zakrivljenih koordinata opće izraze za gradijent, divergenciju, Laplacijan i rotaciju prilagođavamo sfernim koordinatama:

$$\begin{aligned}\nabla \psi &= \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \\ \nabla \cdot \mathbf{V} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + r \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta V_\theta) + r \frac{\partial}{\partial \varphi} (V_\varphi) \right]\end{aligned}$$



$$\nabla \cdot \nabla \psi = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right]$$

$$\nabla \times \mathbf{V} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r\hat{\boldsymbol{\theta}} & \hat{\boldsymbol{\phi}} r \sin \theta \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ V_r & rV_\theta & r \sin \theta V_\varphi \end{vmatrix}$$

### Primjer 29

$\nabla$ ,  $\nabla \cdot$ ,  $\nabla \times$  za centralnu silu.

Korištenjem prethodnih relacija u sfernim koordinatama možemo brzo doći do izraza gradijent, divergenciju i rotaciju centralne sile.

$$\nabla f(r) = \hat{\mathbf{r}} \frac{df}{dr}$$

$$\nabla r^n = \hat{\mathbf{r}} n r^{n-1}$$

Npr. za Coulombov potencijal  $V = Ze/r$ , električno polje je  $\mathbf{E} = -\nabla V = -Ze \nabla(1/r) = Ze/r^2 \hat{\mathbf{r}}$ .  
Nadalje,

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{r}} f(r) = \frac{2}{r} f(r) + \frac{df}{dr},$$

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{r}} r^n = (n+2)r^{n-1}$$

Zatim,

$$\nabla^2 f(r) = \frac{2}{r} \frac{df}{dr} + \frac{d^2 f}{dr^2}$$

$$\nabla^2 r^n = n(n+1)r^{n-2}$$

Naposljetku,

$$\nabla \times \hat{\mathbf{r}} f(r) = 0$$

### Integrali u sfernim koordinatama

Duljina prostorne krivulje, u slučaju kada je krivulja parametrizirana kao  $\mathbf{r}(t) = (r(t), \theta(t), \varphi(t))$ ,

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2} dt$$

je skalarni integral. Krivuljni integral je suma jednostavnih integrala, što lako vidimo kada razvijemo skalarni produkt kao

$$\begin{aligned} \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int (A_r dr + A_\theta d\theta + A_\varphi d\varphi) \\ &= \int (A_r \dot{r} + A_\theta \dot{\theta} + A_\varphi \dot{\varphi}) dt \end{aligned}$$

### Primjer 30

#### Površina polukugle

Formulu za površinu možemo napisati kao:

$$\int h_\theta h_\varphi d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 2\pi r^2 \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta$$

$$= -2\pi r^2 \cos \theta \Big|_0^{\pi/2} = 2\pi r^2$$

kao što smo i očekivali.

### Primjer 31

#### Volumen elipsoida

Jednadžba elipsoida s poluosima  $a, b, c$  dana je izrazom

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \text{ tako da je } z(x, y) = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Oblik izraza za  $z(x, y)$  nam ukazuje da će biti komplicirano izračunati volumen elipsoida u Cartesijevim koordinatama. Jednostavnije je parametrizirati elipsu u sfernim koordinatama kao

$$x = a \sin \theta \cos \varphi, \quad y = b \sin \theta \sin \varphi, \quad z = c \cos \theta.$$

Uvrštavanjem možemo provjeriti da ova parametrizacija zadovoljava jednadžbu elipse. Zatim, transformiramo volumni integral u sferne koordinate korištenjem Jacobijana.

$$dxdy = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} d\theta d\varphi = \begin{vmatrix} a \cos \theta \cos \varphi & -a \sin \theta \sin \varphi \\ b \cos \theta \sin \varphi & b \sin \theta \cos \varphi \end{vmatrix} d\theta d\varphi$$

$$= abd\theta d\varphi \sin \theta \cos \theta$$

Volumen u pozitivnom oktantu dan je sa

$$V = \int z(x, y) dxdy = \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} c \cos \theta ab \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{2} abc \int_0^1 \cos^2 \theta d \cos \theta = \frac{\pi}{6} abc \cos^3 \theta \Big|_{\cos \theta=0}^1 = \frac{\pi}{6} abc$$

Množenjem prethodnog izraza sa 8, pronalazimo da je volumen elipsoida  $\frac{4}{3} \pi abc$ .

Ovaj izraz se svodi na volumen kugle za  $a=b=c=R$ .

## *Tenzorska analiza*

U dosadašnjim razmatranjima vektori su bili definirani na dva ekvivalentna načina:

- (i) geometrijski, određivanjem iznosa i smjera, kao usmjerena dužina
- (ii) algebarski, određivanjem komponenti u Cartezijevom (ortogonalnom) koordinatnom sustavu.

Druga je definicija bila dovoljna u dosadašnjim razmatranjima vektorske analize. Međutim, definicija vektora kao veličine koja ima iznos i smjer nije jednoznačna i stoga je nepotpuna. Naime, susrest ćemo veličine, kao što su elastične konstante i indeksi loma u anizotropnim sredstvima, koje ovise o iznosu i smjeru, ali nisu vektori. Stoga tražimo novu definiciju vektora. Pritom ćemo za prototip koristiti vektor položaja  $\mathbf{r}$ . U ovom ćemo poglavlju tako iznijeti dvije nove definicije koje su ključne za formiranje pojma tenzora.

Tenzori su važni u mnogim područjima fizike, uključujući opću teoriju relativnosti i elektrodinamiku. Promotrimo na primjer rotaciju krutog tijela oko fiksne osi. Tada je  $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ , gdje je  $\mathbf{L}$  impuls vrtnje,  $I$  moment tromosti tijela oko osi rotacije, a  $\boldsymbol{\omega}$  kutna brzina. Kao što je naznačeno u jednadžbi  $\mathbf{L}$  i  $\boldsymbol{\omega}$  su paralelni vektori, a  $I$  je skalar. Međutim, općenito, kad os rotacije nije fiksna, kutna brzina i impuls vrtnje nisu paralelni. Da bi jednadžba  $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$  bila točna,  $I$  ne može biti skalar; mora biti neka veličina koja pomnožena s vektorom opet daje vektor u drugom smjeru. Pokazat ćemo da  $I$  mora biti tenzor drugog reda. Promotrimo još jedan sličan primjer. U izotropnom sredstvu električna je polarizacija  $\mathbf{P}$  vektor koji je paralelan električnom polju  $\mathbf{E}$ , tj.  $\mathbf{P} = \chi\mathbf{E}$ , gdje je  $\chi$  konstanta. U neizotropnom mediju to više ne mora biti točno i opet nam je potrebna neka veličina koja pomnožena s vektorom daje vektor u drugom smjeru.

Skalari i vektori su samo posebni slučajevi tenzora. Skalar je određen jednim realnim brojem i naziva se tenzor ranga 0. U trodimenzionalnom prostoru, vektor je određen sa  $3=3^1$  realna broja (npr. 3 Cartesijeve komponente) i naziva se tenzor ranga 1. Vidjet ćemo da tenzor ranga  $n$  ima  $3^n$  komponenti koje se transformiraju na točno određeni način. (U  $N$ -dimenzionalnom prostoru, tenzor ranga  $n$  ima  $N^n$  komponenti.)

Započet ćemo definiranjem vektora u trodimenzionalnom Euklidskom prostoru preko ponašanja njegove tri komponente pri rotacijama koordinatnih osi. Ova ideja **teorije transformacije** je od ključne važnosti za tenzorsku analizu i za grupe transformacija, a također se slaže s matematičkim pojmovima vektora i vektorskih (ili linearnih) prostora, kao i s predodžbom o tome da veličine koje opažamo ne smiju ovisiti o izboru koordinatnog sustava. Postoji važna fizikalna osnova takvog stajališta: fizikalni svijet opisujemo uz pomoć matematike, ali sva fizikalna predviđanja koja vršimo moraju biti neovisna o matematičkim konvencijama kao što je koordinatni sustav s proizvoljnim ishodištem i smjerom koordinatnih osi, tj. o referentnom sustavu koji koristimo (princip relativnosti).

### *Rotacija koordinatnih osi*

Kada pretpostavimo da je prostor izotropan - tj. da ne postoji preferirani smjer, odnosno da su svi smjerovi ekvivalentni, tada fizikalni sustav koji analiziramo ili relevantni fizikalni zakon ne smije ovisiti o našem izboru orijentacije koordinatnih

osi. Stoga je veličina  $S$  koja se ne mijenja s rotacijom koordinatnog sustava u trodimenzionalnom prostoru,  $S=S'$ , rotacijska invarijanta; nazivamo je skalar. Primjeri su masa čestice, skalarni produkt dva vektora  $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{A}'\cdot\mathbf{B}'$ , volumen tijela kojeg razapinju tri vektora. Slično, veličina kojoj se komponente s rotacijom transformiraju na isti način kao komponente udaljenosti točke od ishodišta zove se vektor. Transformacija komponenti vektora s rotacijom koordinata čuva vektor kao geometrijski entitet (kao što je strelica u prostoru), neovisno o orijentaciji referentnog sustava.

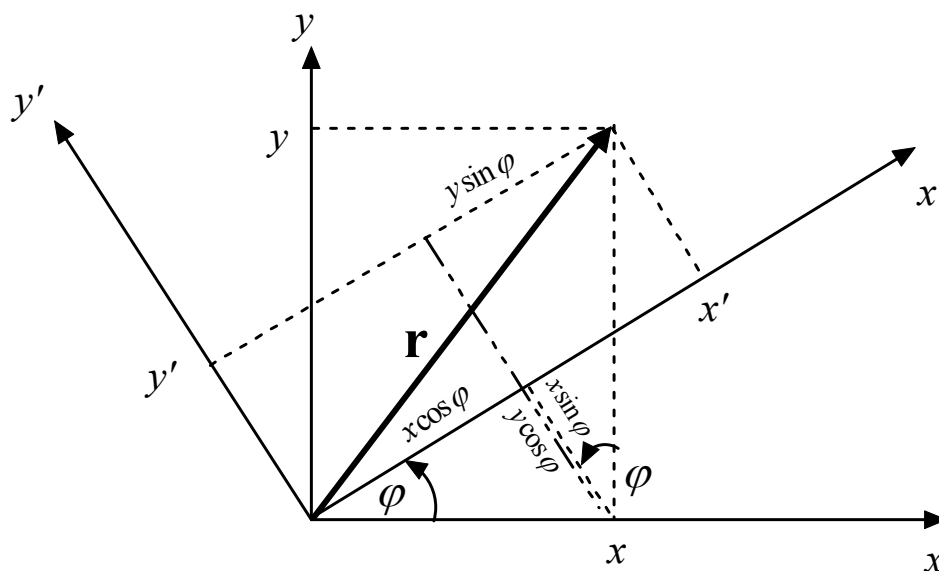
Promotrit ćemo  $\mathbf{r}$  u dva različita sustava, od kojih je jedan zarotiran prema drugome. Radi jednostavnosti, prvo ćemo promotriti dvodimenzionalni slučaj. Zarotirajmo dakle  $x$ - $y$  koordinatni sustav obratno od smjera kazaljke na satu za kut  $\varphi$ , držeći pritom  $\mathbf{r}$  fiksni (to znači da je fizikalni sustav fiksni). Tada iz Crt. 41 možemo iščitati sljedeće relacije između komponenti u originalnom sustavu (necrtkanom) i onih u novom, rotiranom sustavu (crtkanom):

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi \\y' &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi\end{aligned}\tag{2.15}$$

Komponente vektora transformiraju se s rotacijama kao koordinate točke (odnosno, kao što se transformirao  $\mathbf{r}$ ). Stoga, kad god se neki par veličina  $(A_x, A_y)$  u  $xy$ -koordinatnom sustavu rotacijom transformira u par  $(A_x', A_y')$  i pritom vrijedi

$$\begin{aligned}A_x' &= A_x \cos \varphi + A_y \sin \varphi \\A_y' &= -A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi\end{aligned}\tag{2.16}$$

tada definiramo da su  $A_x$  i  $A_y$  komponente vektora  $\mathbf{A}$ .



Crt. 41 Rotacija Cartesijevih koordinatnih osi  $x$  i  $y$  oko  $z$  osi

Dakle, vektor se definira preko transformacija svojih komponenti pri rotacijama koordinatnog sustava. Vektor  $\mathbf{A}$  varira s rotacijama kao vektor  $\mathbf{r}$ , tj. "kovarira". Ako par brojeva  $A_x$  i  $A_y$  ne pokazuje ovaj oblik invarijancije (ili kovarijancije) kada se koordinate rotiraju, tada taj par brojeva ne čini komponente vektora. U tom smislu, koordinate vektora pripadaju zajedno. U suprotnosti, iz Crt. 41 vidimo da ako

uzmimo samo jednu komponentu, npr.  $A_x$ , tada ta komponenta nije invarijantna na rotacije, tj. ona mijenja duljinu u rotiranom koordinatnom sustavu.

Vektorske komponente  $A_x$  i  $A_y$  koje zadovoljavaju relacije (2.16) pridružuju svakoj točki u prostoru iznos  $A$  i smjer. Iznos je skalarna veličina, invarijantna na rotacije koordinatnog sustava. Smjer (u odnosu na necrtan sustav) je na sličan način invarijantan na rotacije koordinatnog sustava. Rezultat je da komponente vektora mogu varirati u skladu s (2.16), ali  $A_x'$  i  $A_y'$  definiraju vektor istog iznosa i smjera (relativno prema necrtanom sustavu). Komponente od  $\mathbf{A}$  u nekom koordinatnom sustavu čine reprezentaciju od  $\mathbf{A}$  u tom koordinatnom sustavu. Relacija (2.16) je garancija da je  $\mathbf{A}$  invarijantan na rotacije.

Radi proširenja prethodnih razmatranja na tri, četiri i više dimenzija uvest ćemo kompaktniju notaciju. Neka

$$x \rightarrow x_1$$

$$y \rightarrow x_2$$

$$a_{11} = \cos \varphi, \quad a_{12} = \sin \varphi$$

$$a_{21} = -\sin \varphi, \quad a_{22} = \cos \varphi$$

i  $z \rightarrow x_3$  u višim dimenzijama itd. Tada relacija (2.15) postaje

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \tag{2.17}$$

$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

Koeficijent  $a_{ij}$  je kosinus smjera, tj. kosinus kuta  $\varphi_{ij}$  između  $x_i'$  i  $x_j$ :

$$a_{12} = \cos \varphi_{1'2} = \sin \varphi$$

$$a_{21} = \cos \varphi_{2'1} = \cos \left( \varphi + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin \varphi$$

Prednost nove notacije je u tome što nam omogućava korištenje simbola sumacije  $\Sigma$  i što relaciju (2.17) možemo napisati kao

$$x_i' = \sum_{j=1}^2 a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2 \tag{2.18}$$

Primijetimo da je  $i$  parametar koji daje jednu jednadžbu kada uvrstimo 1, a drugu kada uvrstimo 2. Indeks  $j$ , je naravno sumacijski indeks kojega možemo zamijeniti bilo kojim pogodnim simbolom, isto kao što mijenjamo varijable integracije.

Generalizacija na više dimenzija je sada vrlo jednostavna. Za skup od  $N$  veličina  $V_j$  kažemo da su komponente  $N$ -dimenzionalnog vektora  $\mathbf{V}$ , ako i samo ako su njihove vrijednosti u rotiranom koordinatnom sustavu dane sa

$$V_i' = \sum_{j=1}^N a_{ij}V_j, \quad i = 1, 2, \dots, N \tag{2.19}$$

Kao i prije  $a_{ij}$  su kosinusi kuta između pozitivnog  $x_i'$  smjera i pozitivnog  $x_j$  smjera. Stoga možemo pisati (Cartesijeve koordinate)

$$a_{ij} = \frac{\partial x_i'}{\partial x_j} \tag{2.20}$$

Ako sada upotrijebimo inverznu rotaciju ( $\varphi \rightarrow -\varphi$ ) dobijemo

$$x_j = \sum_{i=1}^2 a_{ij}x_i', \quad \text{ili} \quad a_{ij} = \frac{\partial x_j}{\partial x_i'} \tag{2.21}$$

Primijetimo da je  $\frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}$ ; ovo vrijedi samo za Cartesijeve koordinate. Korištenjem relacija (2.20) i (2.21) relaciju (2.19) možemo pisati kao

$$V'_i = \sum_{j=1}^N \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} V_j = \sum_{j=1}^N \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} V_j \quad (2.22)$$

Kosinusi smjera  $a_{ij}$  zadovoljavaju **uvjet ortogonalnosti**.

$$a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} \quad (2.23)$$

ili ekvivalentno

$$a_{ji} a_{ki} = \delta_{jk} \quad (2.24)$$

Simbol  $\delta_{jk}$  u relacijama (2.23) i (2.24) je Kroneckerov delta-simbol

$$\begin{aligned} \delta_{jk} &= 1 \quad \text{za } j = k \\ \delta_{jk} &= 0 \quad \text{za } j \neq k \end{aligned} \quad (2.25)$$

Relacije (2.23) i (2.24) mogu se u dvodimenzionalnom slučaju jednostavno provjeriti uvrštavanjem  $a_{ij}$ , što vodi na poznati identitet  $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ . Za provjeru opće relacije (2.23) iskazujemo  $a_{ij}$  preko parcijalnih derivacija kao u (2.20) i (2.21) te dobivamo

$$\sum_i \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} = \sum_i \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} = \frac{\partial x_j}{\partial x_k}.$$

Posljednji korak slijedi iz pravila za parcijalno deriviranje, uz pretpostavku da je  $x_j$  funkcija od  $x'_1, x'_2, x'_3, \dots$ , itd. Konačni rezultat,  $\partial x_j / \partial x_k$ , je jednak  $\delta_{jk}$  jer su  $x_j$  i  $x_k$  kao koordinatne linije za  $j \neq k$  međusobno okomiti (u dvije ili tri dimenzije) odnosno ortogonalni (za bilo koju dimenziju). Drugim riječima,  $x_j$  i  $x_k$  su za  $j \neq k$  potpuno neovisne varijable. Ako je  $j=k$ , tada je jasno da je parcijalna derivacija  $\partial x_j / \partial x_k$  jednaka 1.

U redefiniranju vektora preko načina na koji se njegove komponente transformiraju kod rotacije koordinatnog sustava, trebali bismo naglasiti dvije točke:

- Ova preciznija definicija nije samo korisna već je i nužna u opisu našeg fizikalnog svijeta. Kada se svi vektori u nekoj vektorskoj jednadžbi kovarijantno transformiraju (t.j. transformiraju se poput vektora položaja), tada je ta vektorska jednadžba neovisna o izboru koordinatnog sustava. (Nije niti nužno da sustav bude Cartesijev) Ona se uvijek može izraziti u nekom koordinatnom sustavu. Neovisnost o referentnom sustavu (koja slijedi iz kovarijancije) je potrebna da bi se formulirali univerzalni zakoni fizike koji uključuju vektore ili općenitije tenzore.

- Ova definicija se može poopćiti, a njeno poopćenje je osnova grane matematike koja je poznata kao tenzorska analiza.

### *Invarijantnost skalarnog produkta na rotacije*

Pokazat ćemo da je skalarni produkt zaista skalar, tj. da se njegova vrijednost ne mijenja rotacijom koordinatnog sustava. Korištenjem relacije (2.19) dobivamo

$$\mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}' = \sum_k A'_k \cdot B'_k = \sum_i a_{1i} A_i \sum_j a_{1j} B_j + \sum_i a_{2i} A_i \sum_j a_{2j} B_j + \sum_i a_{3i} A_i \sum_j a_{3j} B_j$$

Prethodnu relaciju možemo zapisati kao

$$\sum_k A'_k \cdot B'_k = \sum_l \sum_i \sum_j a_{li} A_i a_{lj} B_j$$

Kada preuredimo izraze na desnoj strani dobivamo

$$\sum_k A'_k \cdot B'_k = \sum_l \sum_i \sum_j (a_{li} a_{lj}) A_i B_j = \sum_i \sum_j \delta_{ij} A_i B_j = \sum_j A_j B_j \quad (2.26)$$

Dva zadnja koraka smo dobili korištenjem uvjeta ortogonalnosti za kosinuse smjera (2.23) i (2.24) te definicije Kroneckerovog delta simbola (2.25). Efekt Kroneckerovog delta simbola je poništavanje svih članova za koje su dva indeksa međusobno različita. U relaciji (2.26) to znači stavljanje  $i=j$  i eliminiranje sume po  $i$ . Isto tako smo mogli staviti  $i=j$  i eliminirati sume po  $j$ . Relacija (2.26) nam daje

$$\mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}' = \sum_k A'_k \cdot B'_k = \sum_j A_j B_j = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B},$$

a to je naša definicija skalarnе veličine – one koja je invarijantna na rotacije koordinatnog sustava.

### Kovarijantnost vektorskog produkta

U slučaju vektorskog produkta treba provjeriti da je  $\mathbf{C}=\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  zaista vektor; tj. da za vektorski produkt vrijedi relacija (2.19). Krećući od zarotiranog (crtkanog) sustava dobivamo

$$\begin{aligned} C'_i &= A'_j B'_k - A'_k B'_j, \quad i, j, k \text{ u cikličkom redu} \\ &= \sum_l a_{jl} A_l \sum_m a_{km} B_m - \sum_l a_{kl} A_l \sum_m a_{jm} B_m \\ &= \sum_{l,m} (a_{jl} a_{km} - a_{kl} a_{jm}) A_l B_m \end{aligned} \quad (2.27)$$

Kombinacija kosinusa smjera u zagradama iščezava za  $m=l$ .  $j$  i  $k$  poprimaju fiksne vrijednosti, ovisno o izboru  $i$ , a postoji i 6 kombinacija indeksa  $m$  i  $l$ . Ako je  $i=3$ , tada je  $j=1$ ,  $k=2$  (ciklički redosljed), pa imamo šest sljedećih kombinacija:

$$\begin{aligned} a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} &= a_{33}, \\ a_{13} a_{21} - a_{23} a_{11} &= a_{32}, \\ a_{12} a_{23} - a_{22} a_{13} &= a_{31}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Prethodne relacije su identiteti koji vrijede za kosinuse smjerova. Mogu se provjeriti pomoću determinanti i matrica. Ako relacije iz (2.28) uvrstimo u (2.27) dobivamo

$$\begin{aligned} C'_3 &= a_{33}(A_1 B_2 - A_2 B_1) + a_{32}(A_3 B_1 - A_1 B_3) + a_{31}(A_2 B_3 - A_3 B_2) \\ &= a_{31} C_1 + a_{32} C_2 + a_{33} C_3 = \sum_n a_{3n} C_n \end{aligned} \quad (2.29)$$

Permutiranjem indeksa dobivamo  $C'_1$  i  $C'_2$  te dokazujemo da vrijedi relacija (2.19). Treba napomenuti da je vektorska priroda vektorskog produkta slučajnost koja je vezana uz trodimenzionalnost prostora. Posebno, relacija (2.28) vrijedi samo u trodimenzionalnom prostoru. Također ćemo pokazati da se vektorski produkt dva vektora može promatrati i kao antisimetrični tenzor ranga 2.

## Kovarijantnost gradijenta

Postoji još jedna nejasnoća u transformacijskom zakonu za vektore (2.19), u kojem je  $a_{ij}$  kosinus kuta između osi  $x'_i$  i osi  $x_j$ . Krenemo li od diferencijalnog vektora položaja  $dr$ , i uzmemo li da su  $dx'_i$  funkcije necrtkanih varijabli

$$dx'_i = \sum_j \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} dx_j \quad (2.30)$$

tada parcijalnim deriviranjem dobivamo da su relacije (2.18) i (2.30) konzistentne. Bilo koji skup veličina koji se transformira u skladu s (2.19) definiramo kao **kontravarijantni** vektor.

Međutim, u dosadašnjim razmatranjima susreli smo i malo različit tip vektorske transformacije. Gradijent  $\nabla\varphi$  se transformira kao

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial x'_i} = \sum_j \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \quad (2.31)$$

Koristili smo pravilo o lančanom deriviranju i  $\varphi = \varphi(x,y,z) = \varphi(x',y',z') = \varphi'$  gdje je  $\varphi$  skalarna veličina. Uočite da se (2.31) razlikuje od (2.19) i (2.20) jer se u (2.31) pojavljuje  $\partial x_j / \partial x'_i$  umjesto  $\partial x'_i / \partial x_j$ . Relacija (2.31) je definicija **kovarijantnog vektora** čiji je prototip gradijent.

**Samo u Cartesijevim koordinatama vrijedi**

$$\frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = a_{ij} \quad (2.32)$$

**te nema razlike između kovarijantnih i kontravarijantnih transformacija. U drugim sustavima relacija (2.32) općenito ne vrijedi** i razliku između ove dvije transformacije može se primijetiti. Ovo je važno za zakrivljeni Riemannov prostor opće teorije relativnosti.

U ostatku ovog poglavlja komponente kontravarijantnog tenzora ćemo označavati sa superskriptom,  $A^i$ , dok ćemo supskript  $A_i$  koristiti za kovarijantne vektore. (Ovo bi značilo da bi  $x,y,z$  trebalo ustvari pisati kao  $x^1, x^2, x^3$  jer se  $\mathbf{r}$  transformira kao kontravarijantni vektor. Budući da ćemo se u našim razmatranjima ograničiti na Cartesijeve koordinate mi ćemo u slučaju koordinata nastaviti pisati  $x_1, x_2, x_3$ . To će izbjeći nejasnoće koje bi se pojavile u slučaju npr.  $x^2$  što bi značilo i  $x$  na kvadrat i  $y$ )

## Definicija tenzora ranga 2

Definiramo **kontravarijantne, miješane i kovarijantne tenzore ranga 2** preko relacija koje opisuju kako se njihove komponente transformiraju s rotacijama koordinatnog sustava



$$\begin{aligned}
A'^{ij} &= \sum_{kl} \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x'_j}{\partial x_l} A^{kl}, \\
B_j'^i &= \sum_{kl} \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_l}{\partial x'_j} B_l^k, \\
C'_{ij} &= \sum_{kl} \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} \frac{\partial x_l}{\partial x'_j} C_{kl}
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Očito je rang jednak broju indeksa i stoga je jednak broju parcijalnih derivacija (ili kosinusa smjera) u definiciji: nula za skalar, jedan za vektor, dva za tenzor ranga 2 itd. Svaki indeks poprima vrijednosti od 1 do dimenzije prostora. Broj indeksa (rang tenzora) je neovisan od dimenzije prostora.  $A^{kl}$  je kontravarijantan u odnosu na oba indeksa,  $C_{kl}$  je kovarijantan u odnosu na oba indeksa, a  $B_l^k$  se transformira kontravarijantno u odnosu na prvi indeks  $k$ , a kovarijantno u odnosu na drugi indeks  $l$ . Ponovno, ako koristimo Cartesijeve koordinate, sva tri oblika tenzora drugog reda su jednaka.

Kao i u slučaju komponenti vektora, zakoni transformacije za komponente tenzora daju nam veličine (i osobine) koje su neovisne o izboru koordinatnog sustava. To je razlog zbog kojeg je tenzorska analiza važna u fizici.

Tenzor drugog ranga  $\mathbf{A}$  (s komponentama  $A^{kl}$ ) pogodno je prikazati ispisivanjem komponenti u kvadratno polje (3x3 ako smo u trodimenzionalnom prostoru).

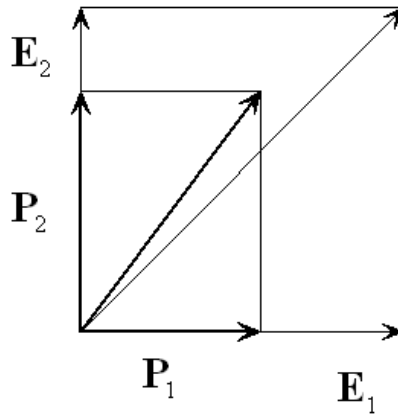
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ A^{31} & A^{32} & A^{33} \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

Ovo ne znači da bilo kakvo kvadratno polje brojeva ili funkcija čini tenzor. Nužan uvjet je da se komponente tog polja transformiraju u skladu s relacijom (2.33).

Fizika i inženjerstvo obiluju primjerima tenzora. Primjeri tenzora ranga 2 su tenzor inercije, Kroneckerov  $\delta$ , multipolni momenti elektrostatike te energija-impuls tenzori opće teorije relativnosti.

#### Primjer 32

Jedan od primjera anizotropije kristalnih tvari je ovisnost induciranog dipolnog momenta o smjeru primijenjenog električnog polja. Neka je za dani smjer električnog polja inducirani dipolni moment po jediničnom volumenu  $\mathbf{P}$  proporcionalan jakosti primijenjenog polja  $\mathbf{E}$  (neka je konstanta proporcionalnosti  $\alpha$ ). Želimo promotriti tvari kod kojih  $\alpha$  ovisi o smjeru primijenjenog polja, kao što je primjerice slučaj u kalcitu. Neka polje  $\mathbf{E}_1$  u  $x$  smjeru stvara polarizaciju  $\mathbf{P}_1$  u  $x$  smjeru, a električno polje  $\mathbf{E}_2$  istog iznosa ( $|\mathbf{E}_1| = |\mathbf{E}_2|$ ), ali u  $y$  smjeru stvara polarizaciju  $\mathbf{P}_2$  u  $y$  smjeru. Pritom zbog ovisnosti  $\alpha$  o smjeru općenito neće biti ispunjeno  $|\mathbf{P}_1| = |\mathbf{P}_2|$  (vidi Crt. 42). Što ako stavimo električno polje pod kutom od  $45^\circ$ ?



Crt. 42

$\mathbf{P}=\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2$  pa polarizacija više nije paralelna električnom polju. Pomaci naboja više nisu u smjeru vanjske sile jer postoji antisimetrija unutrašnjih elastičnih sila. Budući nema ništa posebno u kutu od  $45^\circ$  možemo zaključiti da općenito vektor polarizacije neće biti paralelan s vektorom električnog polja. Promotrimo stoga općeniti slučaj orijentacije kristala u odnosu na koordinatne osi. Električno polje u  $x$  smjeru stvorit će polarizaciju s  $x$ ,  $y$  i  $z$  komponentama

$$P_x = \alpha_{xx}E_x \quad P_y = \alpha_{yx}E_x \quad P_z = \alpha_{zx}E_x .$$

Isto će se dogoditi i s električnim poljima u  $y$  i  $z$  smjeru

$$P_x = \alpha_{xy}E_y \quad P_y = \alpha_{yy}E_y \quad P_z = \alpha_{zy}E_y ,$$

$$P_x = \alpha_{xz}E_z \quad P_y = \alpha_{yz}E_z \quad P_z = \alpha_{zz}E_z .$$

Ako električno polje ima komponente u  $x$ ,  $y$  i  $z$  smjeru tada će resultantna polarizacija bit zbroj doprinosa po svim smjerovima

$$P_x = \alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y + \alpha_{xz}E_z$$

$$P_y = \alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y + \alpha_{yz}E_z .$$

$$P_z = \alpha_{zx}E_x + \alpha_{zy}E_y + \alpha_{zz}E_z$$

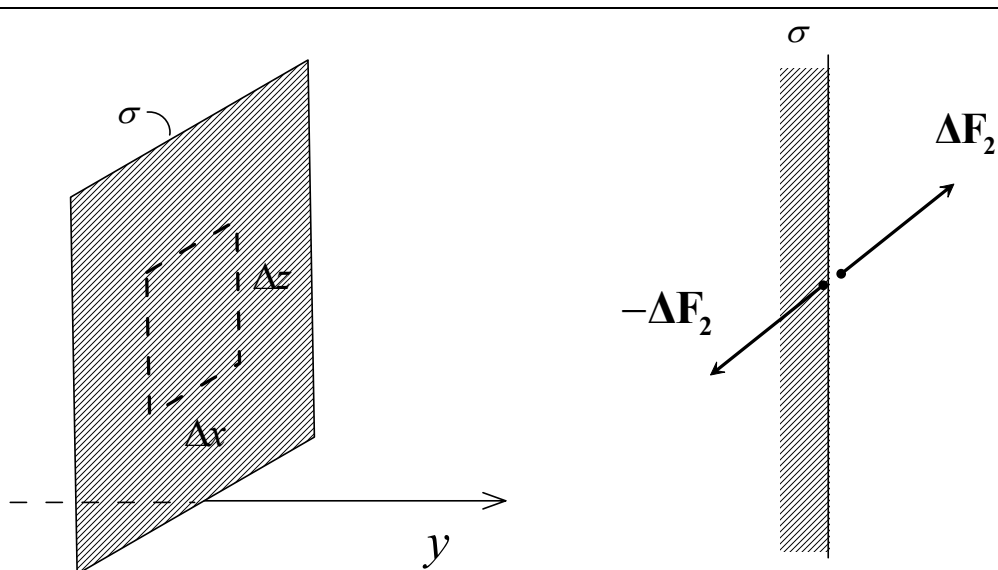
Dielektrično ponašanje kristala opisano je dakle s 9 veličina  $\alpha_{ij}$ .

### Primjer 33

#### Tenzor napetosti

Promotrimo neko malo područje u čvrstom tijelu. Često se kaže da postoje različite „napetosti“ u tijelu, pri čemu se misli da postoje unutrašnje sile između susjednih dijelova tijela. Te sile djeluju na plohe koja ograničavaju naše područje, a vidjet ćemo da se mogu opisati preko tenzora.

Ako prerežemo neko jako elastično tijelo, npr. komad želea, materijal sa svake strane našeg reza će se općenito pomaknuti zbog djelovanja unutrašnjih sila. Naime, prije našeg reza postojale su sile između ta dva dijela želea koje su taj komad držale cjelovitim. Napetosti ćemo definirati preko tih sila.



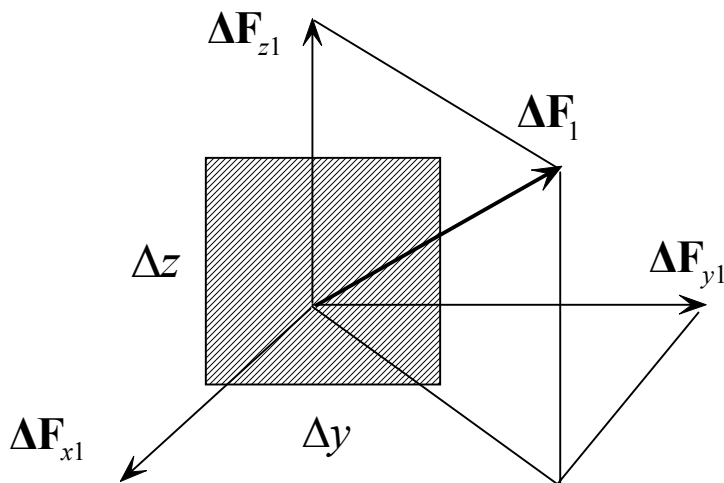
Crt. 43 Materijal na lijevoj strani ravnine  $\sigma$  djeluje na desnu stranu površinu  $\Delta x \Delta z$  silom  $\Delta \mathbf{F}_2$ .

Promotrimo neku zamišljenu ravninu koja je okomita na  $y$ -os (kao na Crt. 43) i zapitajmo se o sili koja djeluje na mali površinski element  $\Delta x \Delta z$ . Materijal na lijevoj strani ravnine djeluje na materijal na desnoj strani silom  $\Delta \mathbf{F}_2$ . Naravno postoji i sila reakcije  $-\Delta \mathbf{F}_2$  kojom materijal na desnoj strani djeluje na materijal na lijevoj strani. Ako je element površine dovoljno mali tada očekujemo da će sila biti proporcionalna površini. Do sada smo se susreli s jednim oblikom napetosti, tlakom u npr. tekućini u mirovanju. Tlak smo definirali kao silu po jedinici površine, pri čemu je sila bila okomita na površinu. Za čvrsta tijela, kao i za viskozne tekućine u gibanju, sila međutim ne mora biti okomita na površinu. Uz tlakove (koji mogu biti pozitivni i negativni) postoje i takozvane sile smika, odnosno komponente sile koja djeluje tangencijalno na površinu. U definiciji naprezanja moramo stoga uzeti u obzir sve moguće komponente sile. Primijetimo također i da će sile općenito biti različite ako prerežemo materijal pod nekim drugim kutom pa tako i kad ga prerežemo okomito na  $x$  ili  $z$  os, što je posljedica unutrašnje strukture materijala. Stoga nam je za opis napetosti potreban tenzor.

Prvo, promotrimo rez okomit na  $y$ -os kao i rastavimo silu  $\Delta \mathbf{F}_1$  na tri komponente  $\Delta F_{x1}$ ,  $\Delta F_{y1}$  i  $\Delta F_{z1}$  kao na Crt. 44. Omjer tih komponenti s površinom  $\Delta y \Delta z$  označit ćemo sa  $S_{xx}$ ,  $S_{yx}$  i  $S_{zx}$ . Na primjer,

$$S_{zx} = \frac{\Delta F_{z1}}{\Delta y \Delta z} \quad (2.35)$$

Prvi se indeks odnosi na smjer komponente, a drugi na okomicu na površinu.



**Crt. 44** Sila  $\Delta\mathbf{F}_1$  koja djeluje na mali element površine  $\Delta y\Delta z$  koji je okomit na  $x$ -os rastavlja se u tri komponente.

Na isti način možemo promotriti i rez okomito na  $y$ -os pa silu  $\Delta\mathbf{F}_2$ , koja djeluje na malu površinu  $\Delta x\Delta y$ , rastavit na komponente te definirati omjere tih komponenti s površinom  $S_{xy}$ ,  $S_{yy}$  i  $S_{zy}$ . Analogno ćemo definirati i omjere komponenti sile  $\Delta\mathbf{F}_3$  na malu površinu  $\Delta y\Delta z$  kao  $S_{xz}$ ,  $S_{yz}$  i  $S_{zz}$ . Devet veličina koje smo dobili  $S_{ij}$  dovoljno je za opis unutrašnjih napetosti, a može se dokazati da formira tenzor (više u npr. Feynman Lectures on Physics, Volume II ili Supek, Teorijska fizika i struktura materije I dio).

### Zbrajanje i oduzimanje tenzora

Zbrajanje i oduzimanje tenzora definira se preko njihovih komponenti kao što se čini i s vektorima. Ako je

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C},$$

tada je

$$A^{ij} + B^{ij} = C^{ij}$$

Naravno,  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$  moraju biti tenzori istog ranga i moraju biti oba izraženi u prostoru s istim brojem dimenzija.

### Konvencija o sumiranju

U tenzorskoj analizi uobičajeno je uvesti konvenciju o sumiranju koja nam omogućava pisati relacije (2.33) u sažetijem obliku. Dokle god razlikujemo kovarijantnost i kontravarijantnost, dogovorit ćemo se da kada se neki indeks pojavljuje na jednoj strani jednadžbe, jednom kao supskript, a drugi put kao superskript (osim za koordinate, gdje su indeksi uvijek supskripti), tada automatski pretpostavljamo sumiranje preko tog indeksa. Na primjer,  $a_{ij}b^{jk}$  znači u 3D prostoru  $a_{i1}b^{1k} + a_{i2}b^{2k} + a_{i3}b^{3k}$ , dok  $a_i^i$ ,  $a_j^j$  i  $a_k^k$  svi znače  $a_1^1 + a_2^2 + a_3^3$ . Nije važno koje se slovo koristi za indeks po kojem se sumira, isto kao što to nije važno ni za varijablu po kojoj se integrira. Tada možemo napisati drugu relaciju u (2.33) kao

$$B_j^i = \frac{\partial x_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_l}{\partial x_j} B_l^k \quad (2.36)$$

gdje se pretpostavlja sumiranje po  $k$  i  $l$ . Ovo je tzv. **Einsteinova konvencija o sumiranju**.

Kao primjer korištenja konvencije o sumiranju i nekih tehnika tenzorske analize pokazat ćemo da je Kroneckerov delta,  $\delta_{kl}$  u stvari miješani tenzor ranga 2,  $\delta_l^k$ . (Primijetite da kada spominjemo tenzor  $\mathbf{A}$ , često samo napišemo tipičnu komponentu  $A_{ij}$ . To je ispravno dokle god ne pišemo besmislene izraze kao  $\mathbf{A} = A_{ij}$ .) Da bismo dokazali da je  $\delta_l^k$  tenzor moramo pokazati da zadovoljava relaciju (2.33). Upotrebom konvencije o sumiranju vidimo da se  $\delta_l^k$  transformira kao

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x'_l}{\partial x_j} \delta_l^k = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x'_k}{\partial x'_j}, \quad (2.37)$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz definicije Kroneckerovog delta. Sada iz lančanog pravila o parcijalnom deriviranju slijedi

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x'_k}{\partial x'_j} = \frac{\partial x'_i}{\partial x'_j}. \quad (2.38)$$

Budući da su  $x'_i$  i  $x'_j$  neovisne koordinate, promjena jedne koordinate kada se mijenja druga mora biti 0 ako su različite, a 1 ako su iste, odnosno

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x'_j} = \delta_j^i \quad (2.39)$$

Dakle,

$$\delta_j^i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x'_k}{\partial x'_j} \delta_l^k \quad (2.40)$$

što nam pokazuje da su  $\delta_l^k$  komponente miješanog tenzora ranga 2. Primijetite da je ovaj rezultat neovisan o broju dimenzija prostora.

Kroneckerov delta ima iste komponente u svim rotiranim koordinatnim sustavima pa ga zovemo izotropnim tenzorom. Ne postoje izotropni tenzori prvog reda (vektori).

### *Simetrija- Antisimetrija*

Redoslijed pojavljivanja indeksa u našem opisu tenzora je važan. Općenito,  $A^{mn}$  ne ovisi o  $A^{nm}$ . Postoje međutim neki slučajevi od posebnog interesa. Ako, za sve  $m$  i  $n$  vrijedi da je

$$A^{mn} = A^{nm} \quad (2.41)$$

tada takav tenzor nazivamo **simetričnim**. Ako, je s druge strane za svaki  $m$  i  $n$  ispunjeno

$$A^{mn} = -A^{nm} \quad (2.42)$$

tada je tenzor **antisimetričan**. Svaki tenzor ranga 2 može se rastaviti na simetrični i antisimetrični tenzor na slijedeći način

$$A^{mn} = \frac{1}{2}(A^{mn} + A^{nm}) + \frac{1}{2}(A^{mn} - A^{nm}) \quad (2.43)$$

Prvi izraz s desne strane relacije (2.43) je simetrični tenzor, a drugi antisimetrični. Sličan rastav funkcija na simetrične i antisimetrične koristi se u kvantnoj mehanici.

### Primjer 34

#### Tenzori inercije, kvadrupolni tenzori

Elementi tenzora inercije  $I_{il} = \sum_{\alpha} m^{(\alpha)} [(r^{(\alpha)})^2 \delta_{il} - x_i^{(\alpha)} x_l^{(\alpha)}]$ , gdje su  $m^{(\alpha)}$  mase točkastih čestica koje se nalaze na udaljenosti  $r^{(\alpha)}$  od ishodišta  $O$  pokazuju da je tenzor inercije simetričan.

Navedeni se izraz za tenzor inercije može dobiti iz definicije momenta kutne količine gibanja

$$\mathbf{L} = \sum_{\alpha} \mathbf{r}^{(\alpha)} \times m^{(\alpha)} \mathbf{v}^{(\alpha)} = \sum_{\alpha} \mathbf{r}^{(\alpha)} \times m^{(\alpha)} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^{(\alpha)}) = \sum_{\alpha} m^{(\alpha)} (\boldsymbol{\omega} (r^{(\alpha)})^2 - \mathbf{r}^{(\alpha)} (\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}^{(\alpha)})) ,$$

gdje smo iskoristili činjenicu da se brzina neke čestice koja se nalazi na udaljenosti  $r$  od ishodišta i rotira kutnom brzinom  $\boldsymbol{\omega}$  može iskazati kao  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  te upotrijebili vektorski identitet  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ . Promotrimo  $x$  komponentu momenta kutne količine gibanja

$$L_1 = \sum_{(\alpha)} m^{(\alpha)} \left[ (r^{(\alpha)})^2 \omega_1 - x_1 (\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3) \right].$$

Ona se može iskazati i kao  $L_1 = I_{11} \omega_1 + I_{12} \omega_2 + I_{13} \omega_3$  pa dobivamo tri komponente tenzora inercije. Iz  $y$  i  $z$  komponente momenta impulsa onda dobivamo i preostalih 6 komponenti. Simetričnost tenzora inercije znači da samo 6 od ukupno 9 komponenti može biti različito.

Kada želimo promotriti kruto tijelo potrebno je samo  $m^{(\alpha)}$  zamijenit sa  $\rho(\mathbf{r}) dx dy dz = \rho(\mathbf{r}) d\tau$  te sve sume zamijenit s integracijama po volumenu tijela. Tada možemo tenzor inercije u Cartesijevim koordinatama zapisati i u matričnom obliku iz kojeg je također odmah vidljiva simetričnost

$$I = [I_{ij}] = \begin{pmatrix} \int (y^2 + x^2) \rho d\tau & -\int xy \rho d\tau & -\int xz \rho d\tau \\ -\int xy \rho d\tau & \int (z^2 + x^2) \rho d\tau & -\int yz \rho d\tau \\ -\int xz \rho d\tau & -\int yz \rho d\tau & \int (x^2 + y^2) \rho d\tau \end{pmatrix}.$$

Slično, električni kvadrupolni momenti  $Q_{ij} = \int (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \rho(\mathbf{r}) d^3 r = Q_{ji}$  čine simetričan tenzor.

### Spinori

Nekoć se mislilo da sustav skalara, vektora, tenzora (ranga 2), i tako dalje, čini potpuni matematički sustav koji je dovoljan da bi se opisala fizika neovisno o izboru referentnog sustava. Međutim, svemir i matematička fizika nisu tako jednostavni. U slučaju elementarnih čestica matematički opis ovisi o spinu. (Spin je intrinzični angularni moment, u jedinicama  $\hbar$ . On se razlikuje od klasičnog, orbitalnog impulsa vrtnje koji nastaje zbog gibanja.) Tako se čestice spina 0 (npr.  $\pi$  mezoni i  $\alpha$  čestice) mogu opisati kao skalari, čestice spina 1 (deuteroni) kao vektori, čestice spina 2 (gravitoni) kao tenzori. Ovaj niz međutim preskače najčešće čestice: elektrone, protone, neutrine i neutrone, koji svi imaju spin  $\frac{1}{2}$ . Ove čestice se opisuju **spinorima**, a to su dvokomponentne valne funkcije- jedna za stanje spina gore, a druga za stanje spina dolje. Spinor nije ni skalar, ni vektor, ni tenzor.

## Kontrakcija

U slučaju vektora, skalarni produkt smo formirali zbrajanjem umnožaka odgovarajućih komponenti:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_i B_i \quad (\text{konvencija o sumiranju}).$$

Generalizacija ovog izraza u tenzorskoj analizi je kontrakcija. Dva indeksa, jedan kovarijantan, a drugi kontravarijantan se izjednače i zatim se (kao što slijedi iz konvencije o sumiranju) sumira po indeksu koji se ponavlja. Npr. načinimo kontrakciju miješanog tenzora ranga 2  $B_j^i$ :

$$B_j^i \rightarrow B_i^i = \frac{\partial x_i'}{\partial x_k} \frac{\partial x_l}{\partial x_i'} B_l^k = \frac{\partial x_l}{\partial x_k} B_l^k = \delta_k^l B_l^k = B_k^k$$

Primijetite da se sumira i po  $i$  i po  $k$  indeksu. Naš kontrahirani miješani tenzor ranga 2 je invarijantan i stoga je skalar. To je upravo ono što smo dobili i za skalarni produkt dva vektora.

## Direktni produkt

Komponente kovarijantnog vektora (tenzora ranga 1)  $a_i$  i komponente kontravarijantnog vektora  $b^j$  mogu se pomnožiti komponenta s komponentom tako da daju opći izraz  $a_i b^j$ . Tako nastale komponente čine miješani tenzor ranga 2. Naime,

$$a_i b^j = \frac{\partial x_k}{\partial x_i'} a_k \frac{\partial x_j'}{\partial x_l} b^l = \frac{\partial x_k}{\partial x_i'} \frac{\partial x_j'}{\partial x_l} a_k b^l$$

Uočite da su svi tenzori  $a_i b^j, b_i a^j, a_i b_j, a^i b^j$  međusobno različiti. Kontrakcijom dobivamo skalarni produkt,  $a_i b^i = a_k b^k$ .

Operacija pridruživanja dva vektora  $a_i$  i  $b^j$  koja je upravo opisana poznata je pod nazivom direktni produkt. U slučaju dva vektora direktni produkt je tenzor ranga 2. Općenito, direktni produkt dva tenzora je tenzor čiji je rang jednak sumi dva početna ranga; tj.

$$A_j^i B^{kl} = C_j^{ikl},$$

gdje je  $C$  tenzor ranga 4. Iz relacija (2.33) slijedi

$$C_j^{ikl} = \frac{\partial x_i'}{\partial x_m} \frac{\partial x_n}{\partial x_j'} \frac{\partial x_k'}{\partial x_p} \frac{\partial x_l'}{\partial x_q} C_n^{mpq}.$$

## Kvocijentno pravilo

Neka su  $A_i$  i  $B_j$  vektori. Tada je njihov produkt  $A_i B_j$  tenzor ranga 2. Zanima nas kako prepoznati tenzore kada su implicitno definirani u nekim relacijama. Npr. promotrimo relacije

$$K^i A_i = B \quad (a)$$

$$K_j^i A^j = B^i \quad (b)$$

$$K_j^i A_k^j = B_k^i \quad (c)$$

$$K^{ijkl} A_{ij} = B^{kl} \quad (d)$$

$$K_{ij} A_k = B_{ijk} \quad (e)$$

gdje su u svakoj od navedenih relacija **A** i **B** tenzori poznatog ranga koji je naznačen brojem indeksa. U svim slučajevima,  $K$  je nepoznata veličina, čije transformacijske osobine želimo utvrditi. Pokazat ćemo kvocijentno pravilo za (b), koje kaže: ako relacija (b) vrijedi u svim (zarotiranim) Cartesijevim koordinatnim sustavima tada je  $K$  tenzor ranga koji je naznačen brojem indeksa. Dokaz ostalih relacija vrlo je sličan te je ostavljen za vježbu. Kvocijentno pravilo tada pokazuje da je matrica inercije koja se pojavljuje u relaciji s impulsom vrtnje  $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$  tenzor ranga 2.

Dokaz relacije (b):

U crtkanom koordinatnom sustavu korištenjem transformacijskih osobina od **B** dobivamo

$$K^i_j A'^j = B^i = a_k^i B^k$$

Pošto relacija vrijedi u svim zarotiranim Cartesijevim koordinatnim sustavima,

$$a_k^i B^k = a_k^i (K_l^k A^l)$$

Transformirajući **A** u crtkani koordinatni sustav imamo

$$K^i_j A'^j = a_k^i K_l^k a_j^l A'^j$$

Preuređujući, dobivamo

$$(K^i_j - a_k^i a_j^l K_l^k) A'^j = 0$$

Prethodna relacija treba vrijediti za svaki indeks  $i$  i za svaki crtkani koordinatni sustav. Pošto je  $A'^j$  proizvoljan, zaključujemo

$$K^i_j = a_k^i a_j^l K_l^k,$$

a to je naša definicija miješanog tenzora ranga 2.

Druge relacije mogu se dokazati na sličan način, dajući pritom druge oblike kvocijentnog pravila. Treba uočiti jednu manju zamku. Kvocijentno pravilo nužno ne vrijedi u slučaju kada je  $B$  jednak 0. Transformacijske osobine nule su neodređene.

### Primjer 35

U klasičnoj mehanici, Newtonove jednadžbe gibanja  $m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}$  označavaju na bazi kvocijentnog pravila da ako je masa skalar, a sila vektor tada akceleracija nužno mora biti vektor. Primjeri tenzora drugog reda su magnetska susceptibilnost i električna vodljivost.

$$\mathbf{M}_i = \chi_{ij} H_j$$

$$\mathbf{j}_i = \sigma_{ij} E_j$$

**M** je magnetski moment po jedinici volumena, a **j** gustoća struje (struja po jedinici površine okomite na smjer protjecanja struje.) Po pravilu kvocijenta slijedi da su  $\chi$  i  $\sigma$  tenzori drugog ranga.

Za izotropna sredstva  $\mathbf{M} \propto \mathbf{H}$  i  $\mathbf{j} \propto \mathbf{E}$ , ali u slučaju anizotropnih materijala kao što su kristali, susceptibilnost i vodljivost mogu biti različiti duž različitih osi kristala, i tada su  $\chi_{ij}$  i  $\sigma_{ij}$  općenito tenzori drugog reda, iako obično simetrični.



Neka su mjerenjem određene komponente električne vodljivosti kristala  $\sigma$

$$[\sigma_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pokažite da postoji jedan smjer kristala duž kojeg struja ne može teći. Teče li ista struja duž dva okomita smjera?

Rješenje:

Budući je  $[\sigma_{ij}]$  simetrična matrica, ona ima tri međusobno okomita svojstvena vektora (ili glavne osi) u odnosu na koje je tenzor električne vodljivosti dijagonalan. U tom slučaju, elementi na dijagonali  $\lambda_1, \lambda_2$  i  $\lambda_3$  su svojstvene vrijednosti matrice vodljivosti. Svojstvene vrijednosti računaju se iz izraza  $|\sigma - \lambda \mathbf{I}| = 0$ . Stoga zahtijevamo

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

odakle slijedi

$$(1-\lambda)[(3-\lambda)(1-\lambda)-1]-2(1-\lambda)=0$$

$$(1-\lambda)\lambda(\lambda-4)=0$$

Svojstvene su vrijednosti dakle  $\lambda=0,1,4$ , tako da u odnosu na glavne osi, tenzor vodljivosti ima komponente  $\sigma'_{ij}$  dane sa

$$[\sigma'_{ij}] = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Budući je  $j'_i = \sigma'_{ij} E'_j$ , odmah vidimo da duž jedne od glavnih osi neće teći struja, dok će u dva okomita smjera tok struje postojati, ali neće biti jednak.

### Primjer 36

Tenzor napetosti opisuje unutrašnje sile u nekom materijalu. Ako je materijal elastičan, unutrašnje se deformacije opisuju preko drugog tenzora, tenzora naprezanja  $T_{ij}$ . U slučaju nekog jednostavnog predmeta, kao što je na primjer, metalna šipka, promjena u duljini, proporcionalna je sili pa kažemo da vrijedi Hookov zakon, odnosno

$$\Delta L = \gamma F.$$

Međutim, ako imamo čvrsto tijelo s proizvoljnim deformacijama, naprezanje  $T_{ij}$  općenito je vezano uz napetost  $S_{ij}$  skupom linearnih jednažbi:

$$T_{ij} = \sum_{k,l} \gamma_{ijkl} S_{kl}.$$

Iz kvocijentnog pravila, slijedi da je  $\gamma_{ijkl}$  tenzor četvrog ranga. Budući da svaki od indeksa može poprimiti četiri vrijednosti očekivali bismo  $3^4=81$  koeficijent. Međutim,

zbog raznih simetrija, taj se broj u najgorem slučaju smanjuje na 21, dok su na primjer u slučaju kubičnog kristala dovoljne samo tri elastične konstante.

# **ELEMENTI NUMERIČKOG RAČUNANJA**

## ***Greške i nesigurnosti u numeričkom računanju***

Greške i nesigurnosti sastavni su dio računanja. Neke greške unosi sam čovjek, ali mnoge potječu od računala. Računalne greške pojavljuju se zbog ograničene preciznosti kojom računala pohranjuju brojeve, a ponekad računalo doista i radi grešku (osobito u slučajevima kad se radi kompiliranje uz optimizaciju). Stoga ćemo prije uvođenja nekim metoda numeričkog računanja prvo promotriti greške i nesigurnosti koje potječu od računala.

### *Ograničen opseg brojeva*

Računala su moćna, ali konačna. Problem je kako predstaviti broj u konačnom memorijskom prostoru i kako uzimati u obzir približnu reprezentaciju rezultata.

Brojevi su u računalo predstavljeni u binarnom obliku (0 i 1). Stoga se sa  $N$  bitova može prikazati samo  $2^N$  cijelih brojeva. Pritom se prvi bit koristi za predznak broja (0 za + predznak), a preostalih  $N-1$  bitova predstavljaju vrijednost cijelog broja. To znači da će cijeli brojevi biti u opsegu od  $[0, 2^N-1]$ .

Memorijski čipovi nekih starijih osobnih računala koristili su 8-bitne riječi. U takvim je računalima maksimalan cijeli broj bio  $2^7=128$  («7» zbog toga što se jedan bit koristi za predznak). Pokušaj spremanja većeg broja rezultirao je s numeričkim preljevom (*overflow*). Trenutno većina osobnih računala koristi 32 bita za cijeli broj, što znači da je maksimalan cijeli broj  $2^{31} \sim 10^9$ .

Realni brojevi prikazuju se u notaciji s fiksnim ili pomičnim decimalnim zarezom. U notaciji s fiksnim decimalnim zarezom, broj  $x$  prikazan je kao

$$x_{fiksna} = \text{predznak} \times (\alpha_n 2^n + \alpha_{n-1} 2^{n-1} + \dots + \alpha_0 2^0 + \dots + \alpha_{-m} 2^{-m}). \quad (3.1)$$

To znači da se jedan bit koristi za spremanje predznaka, a preostalih  $N-1$  bitova se koriste za spremanje  $\alpha_i$  vrijednosti ( $n+m=N-2$ ). Vrijednosti  $N, m, n$  ovise o računalu. Za 32-bitna računala, cijeli brojevi tipično imaju 4 bajta (1 bajt= 8 bitova) u dužini i nalaze se u opsegu od

$$-2147483648 \leq n < 2147483647. \quad (3.2)$$

Prednost je ove reprezentacije da svi brojevi imaju istu *apsolutnu* pogrešku koja iznosi  $2^{-m-1}$ . Mana je što mali brojevi imaju velike *relativne* pogreške. U znanstvenom računanju *relativne* pogreške bit će nam često važnije od *apsolutnih* pa ćemo uglavnom koristiti prikaz s pomičnim decimalnim zarezom.

U notaciji s pomičnim decimalnim zarezom (floating-point) broj  $x$  sprema se kao predznak, mantisa i potencija *expfld*. Broj se rekonstruira kao

$$x_{float} = (-1)^s \times \text{mantisa} \times 2^{\text{expfld} - \text{bias}} \quad (3.3)$$

U prethodnom izrazu mantisa sadržava značajne znamenke broja,  $s$  je bit za predznak, dok se stvarnom eksponentu broja doda *bias* i onda se sprema kao eksponencijalno polje *expfld*.

Uvođenje *bias*-a garantira nam da je broj koji se sprema kao eksponent uvijek pozitivan (stvarni eksponent naravno može biti negativan). Na primjer, 32-bitno računalo može koristiti 8 bitova za eksponent, što znači da će eksponent biti u opsegu  $[0, 255]$ . Brojevi s negativnim eksponentom prikazuju se korištenjem *biasa* od 127, koji predstavlja fiksni broj za dano

računalo. To znači da stvarni eksponenti imaju opseg od  $[-127, 128]$ , iako je vrijednost koja se sprema za eksponent u relaciji (3.3) pozitivan broj. Od preostalih bitova jedan se koristi za predznak, a 23 za mantisu.

Važno je prisjetiti se da brojevi u jednostrukoj preciznosti (single-precision) uz ograničen raspon vrijednosti imaju i ograničen broj znamenki u mantisi (6-7 mjesta, odnosno preciznost  $2^{-23}$ ). Čak i ako se napiše broj s više znamenki prevoditelj zanemaruje sve niže znamenke. Naime, mantisa se zapisuje u obliku

$$\text{mantisa} = m_1 \times 2^{-1} + m_2 \times 2^{-2} + \dots + m_{23} \times 2^{-23} \quad (3.4)$$

pri čemu se spremaju samo  $m_i$ , slično kao u (3.1). Ako je broj  $x$  u jednostrukoj preciznosti veći od  $2^{128}$  događa se prelijevanje odozgo (overflow), a ako je manji od  $2^{-128}$  prelijevanje odozdo (underflow). Broj koji će računalo izbaciti može ovisiti o računalu na kojem se proračun vrši, može se dobiti *NAN* (not a number), a rezultat može biti i nepredvidiv.

Ako se pri pisanju programa koriste brojevi u dvostrukoj preciznosti (double precision), tada se 64-bitne riječi koriste umjesto 32-bitnih. 11 bitova koristi se za eksponent, a 52 za mantisu, što znači da brojevi u dvostrukoj preciznosti imaju oko 16 mjesta za mantisu (preciznost je 1 dio u  $2^{52}$ ) i tipično su u opsegu od  $10^{-322}$  do  $10^{308}$ .

Zadatak: Napišite program koji će testirati granice preljevanja odozdo i odozgo (overflow and underflow limits) za računalo na kojem radite. Uzorak pseudokoda je

```
under = 1.
over = 1.
begin do N times
    under = under/2.
    Over=over * 2.
    Write out: loop number, under, over
enddo
```

Morat ćete povećati  $N$  ako vas početni izbor ne dovede do prelijevanja. Pretvara li računalo pri izvršavanju programa u programskom jeziku kojeg koristite prelijevanja u nulu? Što trebate učiniti ako želite biti još precizniji u određivanju granica računanja na vašem računalu? Posebno odredite granice za varijable u jednostrukoj i dvostrukoj preciznosti te za cijele brojeve (u posljednjem ćete slučaju trebati zbrajati i oduzimati jedan da biste vidjeli efekt).

### *Preciznost računala*

Želimo utvrditi na koji način preciznost računala utječe na preciznost proračuna. U tu svrhu promotrit ćemo jednostavno zbrajanje dva 32-bitna broja:

$$7 + 1.0 \times 10^{-7} = ? \quad (3.5)$$

Budući su eksponenti različiti ne mogu se zbrojiti mantise. Računalo će stoga povećati eksponent manjeg broja na eksponent većeg broja, pri čemu će se mantisa smanjiti micanjem bitova nadesno (umetanjem nula). Međutim, zbog činjenice da računalo sprema maksimalno 7 znamenki, znamenke mantise manjeg broja nemaju se gdje zapisati pa računalo ignorira  $10^{-7}$ .

Upravo opisani gubitak preciznosti može se iskazati definiranjem preciznosti računala  $\varepsilon_m$  kao maksimalnog pozitivnog broja koji se može dodati broju koji je u računalu spremljen kao 1, a da se broj koji je spremljen kao 1 ne promijeni:

$$1_c + \varepsilon_m = 1_c \quad (3.6)$$

Indeks  $c$  podsjeća da je to broj koji je spremljen u memoriju računala. Slično  $x_c$ , reprezentacija od  $x$  i stvarni broj  $x$ , vezani su sa

$$x_c = x(1 + \varepsilon), \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_m \quad (3.7)$$

Drugim riječima,  $\varepsilon \approx 10^{-7}$  za jednostruku preciznost i  $10^{-16}$  za dvostruku preciznost.

Zadatak:

Napišite program koji će odrediti preciznost računala  $\varepsilon$  (barem do na faktor od 2). Primjer pseudokoda je:

```
eps=1.
begin do N times
  eps=eps/2.
  one=1.+eps
  write out: loop number, one, eps
enddo
```

Provjerite preciznost u slučaju varijabli jednostruke i dvostruke preciznosti.

Zadatak 3: Sumiranje redova

Sumiranje redova koje se pojavljuje kada želimo izračunati neku funkciju klasičan je numerički problem koji ćemo promotriti na primjeru eksponencijalne funkcije:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (3.8)$$

Želimo iskoristiti red (3.8) za proračun vrijednosti funkcije  $e^{-x}$ , kada je  $x=0.1, 1, 10, 100$  i  $1000$ , pri čemu želimo da apsolutna greška u svakom slučaju bude manja od  $10^{-8}$ . Ali, kako ćemo znati kada treba prestati zbrajati?

Nije lako postići određenu točnost u proračunu  $e^{-x}$ . Jednostavno je pretpostaviti da je greška u sumiranju približno jednaka zadnjem članu koji se sumira (to također pretpostavlja da nema greške pri zaokruživanju; opravdanost te pretpostavke diskutirat ćemo kasnije). Da bismo dobili apsolutnu točnost od  $10^{-8}$  možemo prestati sumirati kada je

$$\left| \frac{\text{član}}{\text{suma}} \right| < 10^{-8}, \quad (3.9)$$

pri čemu je *član* zadnji član u sumi (3.8), a *suma* je akumulirana suma.

Pseudokod koji nam omogućava izvršenje danog sumiranja je:

```
term = 1, sum = 1, eps = 10**(-8)      Inicijalizacija
do
  term = -term *x/i                    Novi član
  sum=sum + term                       Dodati član
  while abs(term/sum) > eps            Prekinuti iteraciju ako
                                      je uvjet ispunjen
end do
```

Odmah vidimo da ova tehnika krati vrijeme računa jer se svaki novi član u sumi računa pomoću staroga pa nije potrebno ni potenciranje ni računanje faktoriijela.

Napišite program koji implementira ovaj pseudokod za naznačene vrijednosti od  $x$ . Svoje rezultate prikažite u obliku tablice

$$x \quad imax \quad suma \quad \frac{|suma - \exp(-x)|}{suma},$$

gdje ćete  $e^{-x}$  izračunati pomoću ugrađene eksponencijalne funkcije.

Modificirajte svoj kod koji sumira red na “dobar način” (bez eksplicitnog računanja faktoriijela) tako da sumira na “loš način” (eksplicitni faktoriijeli).

Promotrite kako se “dobar” i “loš” način sumiranja ponašaju za veliki  $x$ . Posebno, primijetite ima li prelijevanja odozgo ili odozdo. Usporedite vrijeme potrebno za svaku od te dvije metode.

### *Postupanje s greškama*

Zamislite da imamo program značajne složenosti. Kako bismo shvatili zašto nas toliko brinu greške promotrit ćemo jedan primjer. Neka program ima logički slijed

$$po\check{c}etak \rightarrow U_1 \rightarrow U_2 \rightarrow \dots \rightarrow U_n \rightarrow kraj, \quad (3.10)$$

gdje svaki  $U_i$  može činiti jedan korak. Ako svaki korak točan s vjerojatnosti  $p$  tada je vjerojatnost za točnost cijelog programa  $P = p^n$ . Neka program ima 1000 koraka, pri čemu je vjerojatnost točnosti za svaki korak  $p=0.9993$ . To međutim znači da ćemo završiti program s točnosti  $P=0.5$ , odnosno jednako je vjerojatno da će konačan rezultat biti točan kao i da će biti pogrešan. Znanstvenici naravno žele točan rezultat, ili barem rezultat čija je nesigurnost mala.

### **Tipovi grešaka**

#### **1. Tipografske greške**

Mogu biti u programu ili u ulaznoj datoteci. Ako se njihov broj počinje povećavati to je obično znak da je potrebna pauza.

#### **2. Slučajne greške**

Nastaju fluktuacijama u elektronici zbog padova napona, kozmičkih zraka ili činjenice da je netko naglo isključio računalo. One su rijetke, ali ih ne možemo kontrolirati i vjerojatnost da se dogode raste s vremenom računa. Stoga, iako se možemo pouzdati u proračun koji traje nekoliko sekunda, proračun od više tjedana treba ponekad više puta ponoviti da bi se provjerila reproducibilnost računa.

#### **3. Greške aproksimacije**

Nastaju zbog pojednostavljenja matematičkih izraza koje je potrebno da bi se neki problem mogao riješiti ili aproksimirati na računalu. Te greške uključuju zamjenu: beskonačnih redova s konačnim sumama, infinitezimalnih intervala s konačnim intervalima, i promjenjivih funkcija s konstantama. Na primjer

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (3.11)$$

$$\approx \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} = e^x + \varepsilon(x, N), \quad (3.12)$$

gdje je  $\varepsilon(x, N)$  ukupna apsolutna greška. Budući da do ovih grešaka dolazi zbog primjene matematike one se još nazivaju i algoritamskim greškama te ostatkom. Greška aproksimacije jasno se smanjuje kada  $N \rightarrow \infty$ . Posebno, u izrazu (3.12), mala greška nastaje kada je  $N \gg x$ , jer je skala za  $N$  određena vrijednosti od  $x$ . Stoga će greške aproksimacije biti velike ako su  $x$  i  $N$  blizu.

#### 4. Greške zaokruživanja

Svaki broj u računalu predstavljen je s konačnim brojem bitova (i kao posljedica s konačnim brojem znamenki) pa je skup brojeva koje računalo može točno pohraniti mnogo manji od skupa realnih brojeva. Korisno se prisjetiti rasprava o značajnim znamenkama i znanstvenom zapisivanju. Kao primjer za proračun promotrimo kako će računalo sačuvati broj s pomičnom decimalnom točkom

$$a = 11223344556677889900 = 1.12233445566778899 \times 10^{10}.$$

Budući da se eksponent posebno sprema i da je riječ o malom broju možemo pretpostaviti da će biti sačuvan u punoj preciznosti. Mantisa se međutim ne može u potpunosti sačuvati te će znamenke iza 7 najvjerojatnije biti izgubljene čak i u slučaju dvostruke preciznosti (ovisi donekle o duljini riječi u računalu).

Ukupna greška koja se pojavljuje zbog korištenja konačnog broja znamenki za predstavljanje nekog broja akumulira se s porastom broja koraka u nekom proračunu. Štoviše, greške zaokruživanja mogu učiniti da neki algoritam postane nestabilan s brzim porastom greške za neke parametre. Kada raspravljamo o greški kod zaokruživanja možemo promotriti nastaje li od “poništenja oduzimanjem” ili “poništenja množenjem”.

Model: poništenje oduzimanjem

Neka operacija izvršena na računalu obično samo aproksimira analitički odgovor. Do toga dolazi zato što su računala konačna. Neka je  $x_c$  oznaka za broj  $x$  u računalu. Primjer jednostavnog oduzimanja je tada

$$\begin{aligned} a = b - c &\Rightarrow a_c = b_c - c_c, \\ a_c &= b(1 + \varepsilon_b) - c(1 + \varepsilon_c), \\ &\Rightarrow \frac{a_c}{a} = 1 + \varepsilon_b \frac{b}{a} - \varepsilon_c \frac{c}{a}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Greška u  $a$  povećava se kada je  $b \approx c$  jer tada oduzimamo (i stoga gubimo) najznačajnije dijelove oba broja. Tada nam ostaju manje značajni dijelovi. To je općenito pravilo:

Ako oduzimate dva velika broja i kao rezultat dobijete manji broj, tada će mali broj biti manje značajan. Drugim riječima, ako je  $a$  mali to mora značiti da je  $b \approx c$  i tada je

$$\begin{aligned} \frac{a_c}{a} &= 1 + \varepsilon_a, \\ \varepsilon_a &\approx \frac{b}{a} (\varepsilon_b - \varepsilon_c) \end{aligned} \quad (3.14)$$



To pokazuje da čak i kada se relativne greške u  $b$  i  $c$  donekle ponište, njih množi veliki broj  $b/a$ , što može učiniti relativnu grešku od  $a$  značajnom. Ako su s druge strane predznaci od  $b$  i  $c$  takvi da je rezultirajući iznos od  $a$  veći i od  $b$  i od  $c$ , tada nema poništenja oduzimanjem i možemo očekivati točan rezultat.

Dobar primjer poništenja oduzimanjem događa se u sumiranju reda za  $e^{-x}$ . Za velike  $x$ , neki od prvih članova u sumi mogu biti dosta veliki, a budući da je konačan rezultat mali to znači da mora doći do poništenja. Kao posljedica dobar pristup bi bio izračunati  $e^x$  i onda njen inverz i tako dobiti  $e^{-x}$ . To će eliminirati sukcesivna poništenja jer se svi članovi u  $e^x$  zbrajaju.

Provjera: eksperiment poništenja oduzimanjem

### 1. Kvadratna jednadžba

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (3.15)$$

ima analitičko rješenje

$$x'_{1,2} = \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}} \quad (3.16)$$

ili

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (3.17)$$

Promotrimo li izraze (3.16) i (3.17) uočit ćemo da se poništenje oduzimanjem događa kada je  $b^2 \gg 4ac$  jer se tada izraz pod korijenom i izraz koji mu prethodi gotovo ponište. Ako je  $b > 0$ , poništenje oduzimanjem događa se u  $x_1$  i  $x'_2$ , a za  $b < 0$  u  $x_2$  i  $x'_1$ .

(a) Napišite program koji računa sva četiri rješenja za proizvoljne vrijednosti  $a, b$  i  $c$ .

(b) Proučite što se događa pri povećanju poništenja oduzimanjem i povežite to s preciznošću računala.

(Dobar test slučaj koristi  $a = 1$ ,  $b = 1$ ,  $c = 10^{-n}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ )

(c) Proširite svoj program tako da vam uvijek kaže koje rješenje je najpreciznije.

### 2. Treba biti oprezan i izbjegavati poništenje oduzimanjem kad se sumira red. Na primjer, promotrite konačnu sumu članova s alternirajućim predznacima:

$$S_N^{(1)} = \sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \frac{n}{n+1} \quad (3.18)$$

Ako sumiramo posebno pozitivne, a posebno negativne članove, dobivamo dvije sume

$$S_N^{(2)} = -\sum_{n=1}^N \frac{2n-1}{2n} + \sum_{n=1}^N \frac{2n}{2n+1} \quad (3.19)$$

U prethodnom su izrazu svi članovi pozitivni i imamo samo jedno oduzimanje na kraju računa. Čak i to jedno oduzimanje i rezultirajuće poništenje može se zaobići ako sumu raspišemo analitički:

$$S_N^{(3)} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n(n+1)}. \quad (3.20)$$

Iako su sve tri sume jednake, to ne mora biti istina ako se računa numerički.

(a) Napišite program u jednostrukoj preciznosti koji računa  $S_N^{(1)}$ ,  $S_N^{(2)}$ ,  $S_N^{(3)}$ .

- (b) Pretpostavite da  $S_N^{(3)}$  daje točan rezultat. Načinite log-log dijagram relativne greške u ovisnost o broju članova, tj. dijagram ovisnosti  $\log_{10} \left| (S_N^{(1)} - S_N^{(3)}) / S_N^{(3)} \right|$  o  $\log_{10}(N)$ .  
Krenite s  $N=1$  i završite s  $N=1.000.000$ .
- (c) Postoji li linearno ponašanje u nekom dijelu grafa?

### Greške pri množenju

Greška u množenju događa se na sljedeći način:

$$a = b \times c \Rightarrow a_c = b_c \times c_c$$

$$\Rightarrow \frac{a_c}{a} = \frac{(1 + \varepsilon_b)(1 + \varepsilon_c)}{(1 + \varepsilon_a)} \approx 1 + \varepsilon_b + \varepsilon_c \quad (3.21)$$

Budući da  $\varepsilon_b$  i  $\varepsilon_c$  mogu imati suprotan predznak, greška u  $a_c$  je nekad veća, a nekad manja od greške u  $b_c$  i  $c_c$ .

Često možemo procijeniti prosječnu grešku zaokruživanja koja nastaje u nizu množenja ako pretpostavimo da se reprezentacija nekog broja u računalu na slučajan način razlikuje od stvarnog broja. U takvom slučaju imamo analogiju sa slučajnim hodom. Ako je smjer svakog koraka slučajan, tada se pokazuje da je  $R$ , prosječna udaljenost od polazišta koja se prijeđe u  $N$  koraka duljine  $r$ , dana izrazom

$$R \approx \sqrt{N}r \quad (3.22)$$

Iz relacije (3.21) slijedi da svaki korak ima zaokruženu grešku duljine  $\varepsilon_m$ , koja predstavlja preciznost računala. Zamislimo da radimo fizikalne korake duljine  $\varepsilon_m$ . Po analogiji sa slučajnim hodom, prosječna relativna greška  $\varepsilon_{ro}$  koja se pojavljuje nakon velikog broja koraka  $N$  je

$$\varepsilon_{ro} \approx \sqrt{N}\varepsilon_m \quad (3.23)$$

Relacija (2.8) koristit će nam u procjeni grešaka u algoritmima.

U onim situacijama u kojima se greške zaokruživanja ne događaju na slučajan način, potrebna je pomna analiza kako bi se odredila ovisnost greške o broju koraka  $N$ . U nekim slučajevima može se dogoditi da nema poništenja greške te se tada greška može povećavati kao  $N\varepsilon_m$ . Postoje čak i gore situacije u nekim rekurzivnim algoritmima gdje se greške stvaraju na koherentan način (npr. rekurzija prema gore za Besselove funkcije), u kojima se greška povećava kao  $N!\varepsilon_m$ .

Ovu je diskusiju o greškama dobro imati u vidu kad se razmišlja o proračunima koji zahtijevaju sate vremena na superračunalu. Brzo računalo može izvršiti  $10^{10}$  operacija u sekundi, pa u 3h rada izvrši oko  $10^{14}$  operacija u sekundi. To znači da u 3h rada, čak i u najboljem slučaju slučajnih pogreški zaokruživanja, možemo očekivati da se greška zaokruživanja povećala do relativne važnosti od  $10^7\varepsilon_m$ . Da bi greška bila manja od rezultata potrebno je da  $\varepsilon_m < 10^{-7}$ . Ako koristimo varijable s jednostrukom preciznošću na 32 bitnom računalu, koje ima 6-7 preciznih znamenki, naš će rezultat nakon 3h računa sadržavati mnogo šuma.

### Greške u algoritmima

Numerički algoritmi imaju vrlo važnu ulogu u računarskoj fizici. Obično započnemo s fizikalnom teorijom ili matematičkim modelom koje uz pomoć algoritma pretvorimo u shemu

za računanje, koju onda pretvaramo u računalni program. Problem s kojim se suočavamo kod razmatranja nekog algoritma je:

- 1.) Da li konvergira?
- 2.) Koliko su precizni rezultati kad konvergira?
- 3.) Koliko vremena oduzima izvršavanje?

Algoritme obično karakterizira veličina koraka  $h$  ili broj koraka  $N$  koji je potreban da bi se postigao cilj. "Dobar" bi algoritam trebao dati egzaktn rezultat u granici  $h \rightarrow 0$  ili  $N \rightarrow \infty$ . Svaki algoritam sadrži grešku aproksimacije, tj. postoji razlika između egzaktog rezultata i rezultata koji daje algoritam. Ako znamo kako se ponaša greška aproksimacije u ovisnosti o broju članova  $N$ , možemo procijeniti kad možemo stati računati. Međutim, ne treba se zavaravati s pomisli da je ukupna greška nestala samo zato što je npr.  $N$  jako velik pa greška aproksimacije mora biti mala. Naime, ukupna greška u proračunu uključuje i grešku zaokruživanja, sistematske greške, i moguće čak loše ulazne podatke, a sve te greške imaju tendenciju povećavanja što računalo duže radi.

Općenito, kako povećavamo  $N$  ili smanjujemo  $h$  doći ćemo do točke u kojoj greška zaokruživanja prelazi grešku aproksimacije. Naravno, optimalni je izbor parametara onaj koji minimizira ukupnu grešku. Nažalost, često nam nije poznat izraz koji treba minimizirati. Prikazat ćemo neke od metoda koje nam mogu pomoći da odredimo ponašanje greške.

### Ukupna greška

Pretpostavimo da nekom algoritmu treba veliki broj koraka  $N$  za dobivanje dobrog odgovora te da se greška aproksimiranja približava nuli kao

$$\varepsilon_{apr} \cong \frac{\alpha}{N^\beta}.$$

$\alpha$  i  $\beta$  su empirijske konstante koje su različite za različite algoritme, a imaju često konstante vrijednosti samo u granici velikog  $N$ . Greške zaokruživanja rastu s brojem koraka. Ako pretpostavimo da te greške nisu međusobno korelirane tada znamo iz prethodnog razmatranja da je

$$\varepsilon_{zaok} \cong \sqrt{N} \varepsilon_m,$$

gdje je  $\varepsilon_m$  preciznost računala. Ukupna je greška zbroj dvije greške

$$\begin{aligned} \varepsilon_{uk} &= \varepsilon_{apr} + \varepsilon_{zaok} \\ &\cong \frac{\alpha}{N^\beta} + \sqrt{N} \varepsilon_m \end{aligned} \quad (3.24)$$

Pretpostavimo da imamo test proračun za koji znamo točan rezultat dobiti ili analitički ili iz nekog drugog izvora. Usporedbom testa s proračunatim rezultatom možemo odrediti ukupnu grešku  $\varepsilon_{tot}$ . Ako tada nacrtamo  $\log(\varepsilon_{tot})$  u ovisnosti o  $\log(N)$ , možemo iz nagiba pravca odrediti koji je izraz u grešci dominantan za različite vrijednosti od  $N$ .

Da bismo uočili na koji se način različite vrste grešaka ponašaju promotrit ćemo relativne reške. Pretpostavimo da su u greški aproksimacije  $\alpha = 1, \beta = 2$ . Tada je

$$\varepsilon_{apr} \cong \frac{1}{N^2}.$$

Slijedi da će ukupna greška imati ekstrem kada je

$$\frac{d\varepsilon_{tot}}{dN} = 0 \Rightarrow N^{5/2} = \frac{4}{\varepsilon_m}.$$

Ukupna je greška maksimalna za  $N = \infty$ , pa ekstrem iz prethodne relacije odgovara minimumu. Za 32-bitno računalo i proračun u jednostrukoj preciznosti,  $\varepsilon_m \approx 10^{-7}$  pa se minimalna ukupna greška postiže za

$$N^{5/2} \cong \frac{4}{10^{-7}} \Rightarrow N \cong 4099,$$

$$\varepsilon_{tot} \cong \frac{1}{N^2} + \sqrt{N} \varepsilon_m$$

$$= 8 \times 10^{-7} + 33 \times 10^{-7} \cong 4 \times 10^{-6}$$

Ovo nam pokazuje da u tipičnom proračunu veći dio greške potječe od zaokruživanja. Primijetite nadalje da smo u ovom slučaju minimalne greške postigli 40 puta manju preciznost od preciznosti računala. Da smo računali u dvostrukoj preciznosti, rezultati bi bili bolji.

Da bismo smanjili grešku koja potječe od zaokruživanja logično nam se nameće smanjivanje broja koraka  $N$ . Pretpostavimo da ćemo to postići tako što ćemo pronaći algoritam koji brže konvergira s porastom  $N$ , npr. algoritam kojemu se greška aproksimiranja ponaša na sljedeći način

$$\varepsilon_{apr} \cong \frac{2}{N^4}.$$

Ukupna je greška tada

$$\varepsilon_{tot} \cong \frac{2}{N^4} + \sqrt{N} \varepsilon_m.$$

Broj potrebnih koraka za minimalnu ukupnu grešku je

$$\frac{d\varepsilon_{tot}}{dN} = 0 \Rightarrow N^{9/2} = \frac{16}{\varepsilon_m}$$

$$\varepsilon_m \cong 10^{-7} \Rightarrow N \cong 67,$$

$$\varepsilon_{tot} = \frac{2}{N^4} + \sqrt{N} \varepsilon_m$$

$$= 1 \times 10^{-7} + 8 \times 10^{-7} \cong 9 \times 10^{-7}$$

Greška je sada otprilike 4 puta manja a potrebno je 16 puta manje koraka. U ovom slučaju bolji algoritam nije nužno elegantniji, ali zahtijeva manje koraka te stvara manju grešku zaokruživanja.

### Empirijska analiza greške

Pretpostavimo da imate program koji želite optimizirati za najmanju ukupnu grešku, ali da pritom ne znate (ili ne želite izvoditi) ovisnost greške aproksimiranja o broju koraka. Kao što smo upravo raspravljali, znate da se općenito greška zaokruživanja može približno povezati s preciznosti računala i brojem koraka na sljedeći način

$$\varepsilon_{ro} \cong \sqrt{N} \varepsilon_m.$$

S druge strane, greška aproksimiranja trebala bi se smanjivati s povećanjem broja koraka  $N$  te bi stoga za veliki  $N$  greška zaokruživanja trebala predstavljati najznačajniji dio ukupne greške. Pretpostavimo da je egzaktan odgovor na problem dan sa  $\mathcal{A}$ , a onaj koji se dobije s našim algoritmom nakon  $N$  koraka  $A(N)$ . Treba ispitati ponašanje  $A(N)$  za vrijednosti od  $N$  koje su dovoljno velike da bi greška aproksimiranja imala svoju asimptotsku vrijednost (dominira član s najmanjom inverznom potencijom od  $N$ ), ali ne i prevelike (jer bi tada dominirala greška zaokruživanja). U tom slučaju možemo pisati

$$A(N) \cong \mathcal{A} + \frac{\alpha}{N^\beta} \quad (3.25)$$

gdje su  $\alpha$  i  $\beta$  nepoznate konstante. Program izvršimo za neki veliki  $N$  i zatim za  $2N$ . Ako greška zaokruživanja još uvijek ne dominira, tada je

$$A(N) - A(2N) \approx \frac{\alpha}{N^\beta}.$$

Da bismo vidjeli da li su naše pretpostavke ispunjenje te da bismo si grafički mogli predočiti na koji broj decimalnih mjesta naš račun konvergira, možemo nacrtati  $\log|A(N)/A(2N)-1|$  u ovisnosti o  $\log N$ . Dio grafa koji predstavlja ravnu liniju je područje u kojem su prethodne pretpostavke ispunjene, a nagib daje  $-\beta$ .

Za mali  $N$ , nismo u asimptotskom području greške aproksimiranja pa nećemo vidjeti pravac. Kad  $N$  izrazito naraste, greška zaokruživanja više se ne može zanemarivati i graf ponovno počinje odstupati od pravca (s vremenom bi nagib trebao postati  $+1/2$ ).

Sve navedeno znači da eksperimentiranjem možemo zaključiti što se događa s našim algoritmom. Započnemo s malim  $N$  i povećavamo ga sve dok ne dobijemo pravac; daljnji povećavanjem  $N$  s vremenom moramo doći u područje u kojem je greška zaokruživanja dominantna tj. u područje gdje je nagib  $+1/2$ .

Zadatak:

Promotrite red za eksponencijalnu funkciju

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (x^2 < \infty),$$

$$\cong \sum_{n=0}^N \frac{(-x)^n}{n!}$$

Radi ispitivanja efekata akumulacije grešaka u ovom algoritmu, koristite jednostruku preciznost u programu.

1. Napišite program koji računa  $e^{-x}$  kao konačnu sumu.
2. Testirajte ponašanje za  $x=1, 10$  i  $100$ .
3. Ispitajte članove reda za  $x \cong 10$  i promotrite značajna poništenja oduzimanjem koja se događaju kad se od velikih izraza oduzimanjem dobivaju mali. Ispitajte da li se bolja preciznost za velike  $x$  postiže ako se umjesto  $e^{-x}$  koristi  $1/e^x$ .
4. Povećavajući  $N$ , iskoristite program da biste eksperimentalno odredili postoji li raspon od  $N$  za koji je greška aproksimiranja u asimptotskom području, a ujedno manja od greške zaokruživanja. (Možete pretpostaviti da je ugrađena eksponencijalna funkcija u  $c$ -u egzaktna).
5. Ispitajte vrijedi li relacija  $A(N) \cong \mathcal{A} + \frac{\alpha}{N^\beta}$  te ako vrijedi odredite  $\beta$ .

Sumiranje reda je jednostavan i koreliran proces pa se greška zaokruživanja ne akumulira na slučajan način i stoga se ne dobiva ponašanje opisano relacijom u (3.25). Takvo ćemo ponašanje međutim vidjeti u slučaju integracije.

## Rješavanje sustava linearnih algebarskih jednadžbi

### Uvod

Sustavi linearni jednadžbi pojavljuju se u velikom broju fizikalnih problema od klasične do kvantne fizike. Ovo će poglavlje biti uvodno utoliko što će se iznijeti osnovni principi te se neće ući u mnoge tehničke detalje.

Sustav linearnih algebarskih jednadžbi dan je sljedećim izrazima:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1N}x_N &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2N}x_N &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3N}x_N &= b_3 \\ &\dots \\ a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + a_{M3}x_3 + \dots + a_{MN}x_N &= b_M \end{aligned} \tag{3.26}$$

U prethodnom je izrazu  $N$  nepoznanica  $x_j, j=1,2,\dots,N$  vezano sa  $M$  jednadžbi. Koeficijenti  $a_{ij}$ , gdje  $i=1,2,\dots, M$ , a  $j = 1,2,\dots,N$  su poznati brojevi, jednako kao i veličine  $b_i, i=1,2,\dots,M$ , na desnoj strani jednadžbi u (3.26).

### Nesingularni i singularni sustavi jednadžbi

Ako je  $N=M$  tada ima jednaki broj jednadžbi i nepoznanica i postoji mogućnost za dobivanje jednoznačnog rješenja za  $x_j$ . Analitički, može se dogoditi da jednoznačno rješenje nije moguće ako je jedna ili više od  $M$  jednadžbi linearna kombinacija ostalih jednadžbi, što se naziva degeneracijom redaka. Također, rješenja ne mora biti ako sve jednadžbe sadrže neke varijable samo u jednakim linearnim kombinacijama što se naziva degeneracijom stupaca. (Za kvadratne matrice degeneracija redaka povlači degeneraciju stupaca i obratno). Skup jednadžbi koji je degeneriran naziva se singularnim.

U numeričkim proračunima postoje još barem dvije dodatne stvari koje mogu poći po krivu:

- Neke jednadžbe iako nisu linearne kombinacije drugih mogu biti tako blizu linearne ovisnosti da ih greške računala u zaokruživanju mogu načiniti ovisnima u nekoj fazi proračuna. U tom će slučaju numerička procedura propasti, a može nam i javiti da je propala.
- Akumulirane greške zaokruživanja u procesu rješavanja mogu nadvladati pravo rješenje. Ovaj se problem osobito pojavljuje ako je  $N$  prevelik. Numerička procedura u tom slučaju ne pravi algoritamsku grešku, ali se dobiva pogrešan skup  $x_j$  što se može ustanoviti uvrštavanjem u originalni skup jednadžbi. Što je neki skup jednadžbi bliži singularnom, to je veća vjerojatnost da se ovaj problem dogodi, jer će se sve više bliskih poništenja događati tijekom rješavanja. Štoviše prethodna se točka može promatrati i kao poseban slučaj ove točke u kojem je gubitak značenja potpun.

Mnogi su sofisticirani numerički paketi za rješavanje linearnih jednadžbi posvećeni otkrivanju i popravku dvije prethodno navedene patologije. Teško je dati upute o tome kada su sofisticirani pristupi potrebni, jer je svaki linearni problem specifičan. Međutim, ovdje ćemo ipak iznijeti neke grube upute: linearni skupovi jednadžbi za koje  $N$  ide do 20 ili čak 50,

mogu se rutinski rješavati u jednostrukoj preciznosti bez upotrebe sofisticiranih metoda, ako jednačbe nisu bliske singularnim. S dvostrukom preciznošću  $N$  se može proširiti na nekoliko stotina, nakon čega ograničavajući faktor postaje prvenstveno vrijeme, a ne toliko točnost.

Čak se i veliki linearni skupovi, u kojima je  $N$  nekoliko tisuća ili veći, mogu riješiti ako su koeficijenti sparse (većina ih je jednaka nuli).

S druge strane, često se susreću linearni problemi koji su po svojoj prirodi bliski singularnim. U tim je slučajevima ponekad potrebno koristiti sofisticirane metode čak i ako je  $N=10$  (iako rijetko za  $N=5$ ). Rastav singularnih vrijednosti je tehnika koja nekada omogućava pretvaranje singularnih problema u nesingularne te tada nije potrebna dodatna sofisticiranost.

## Matrice

Jednačba (3.26) može se napisati u matričnom obliku kao

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (3.27)$$

Ovdje točka označava množenje matrica.  $\mathbf{A}$  je matrica koeficijenata, a  $\mathbf{b}$  je desna strana relacije (3.26) zapisana kao stupčani vektor,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \dots & & & \\ a_{M1} & a_{M2} & \dots & a_{MN} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_M \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Dogovorno, prvi indeks od  $a_{ij}$  označava redak, a drugi stupac. Većinom nam nije potrebno znati kako je matrica spremljena u memoriju računala; jednostavno se pozivamo na matrične elemente preko njihove dvodimenzionalne adrese, npr.  $a_{34} = a[3]a[4]$ .

### **Množenje matrica**

Umnožak dvije matrice  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$  je matrica  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C}$  čiji su elementi

$$C_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj} \quad (3.29)$$

Suma po  $k$  označava da broj stupaca prve matrice mora biti jednak broju redaka druge matrice. U suprotnom, umnožak dvije matrice ne postoji.

Zadaci računalne linearne algebre su

- Rješenje matrične jednačbe,  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ , za nepoznanicu  $\mathbf{x}$ , gdje je  $\mathbf{A}$  poznata kvadratna matrica koeficijenata, a  $\mathbf{b}$  poznati vektor.
- Rješenje više od jedne matrične jednačbe  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_j = \mathbf{b}_j$ , za skup vektora  $\mathbf{x}_j$ . U tom je zadatku ključno pojednostavljenje to što je matrica  $\mathbf{A}$  konstantna, a samo se mijenjaju vektori  $\mathbf{b}_j$  na desnoj strani.
- Proračun inverzne matrice  $\mathbf{A}^{-1}$ , za kvadratnu matricu  $\mathbf{A}$ , tj.  $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{1}$ , gdje je  $\mathbf{1}$  jedinična matrica (svi elementi nula osim jedinica na dijagonali). Ovaj je zadatak ekvivalentan prethodnom zadatku s  $N$  različitih  $\mathbf{b}_j$  ( $j=1, \dots, N$ ), gdje je svaki od  $\mathbf{b}_j$  jedinični vektor koji ima sve nule osim jednu jedinicu na  $j$ -toj komponenti. Odgovarajući  $x$ -evi su tada stupci inverzne matrice od  $\mathbf{A}$ .
- Proračun determinante kvadratne matrice  $\mathbf{A}$ .

### **Determinanta kvadratne matrice**

Determinanta  $n \times n$  kvadratne matrice  $\mathbf{A}$  definira se kao

$$|\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |R_{ij}| \quad (3.30)$$

za bilo koji  $j=1,2,\dots,n$ , gdje je  $a_{ij}$  element matrice  $\mathbf{A}$ , a  $|R_{ij}|$  determinanta rezidualne matrice od  $\mathbf{A}$ , koja ostane nakon što se matrici  $\mathbf{A}$  ukloni  $i$ -ti redak i  $j$ -ti stupac. Kombinacija

$C_{ij} = (-1)^{i+j} |R_{ij}|$  naziva se kofaktor od  $a_{ij}$ . Determinanta  $1 \times 1$  matrice je sam element.

Inverzna se matrica može dobiti iz izraza

$$A^{-1}_{ij} = \frac{C_{ji}}{|\mathbf{A}|} \quad (3.31)$$

Matrica za koju postoji inverzna matrica ili za koju je determinanta različita od nule naziva se nesingularnom. U suprotnom, matrica se naziva singularnom.

U proračunima s matricama korisno se prisjetiti nekih od teorema linearne algebre:

- Zamjena bilo koja dva retka (ili stupca) matrice mijenja predznak determinante.
- Vrijednost determinante je nula ako je ispunjen jedan od sljedećih uvjeta
  - a) svi elementi nekog retka (ili stupca) su jednaki nuli
  - b) dva retka (ili dva stupca) su međusobno jednaki
  - c) dva retka (ili dva stupca) su proporcionalni
- Ako pomnožimo jedan redak (ili jedan stupac) matrice  $\mathbf{A}$  nekom konstantom tada je determinanta nove matrice  $\mathbf{A}'$  jednaka determinanti matrice  $\mathbf{A}$  pomnoženoj s tom istom konstantom.
- Dodavanje višekratnika jednog retka (ili stupca) drugom retku (ili stupcu) ne mijenja vrijednost determinante. Vrijednost determinante se ne mijenja ni ako retke zamijenimo za stupce, a stupce za retke.

### *Gaussova eliminacija*

Najpoznatiji način rješavanja sustava (3.27) uključuje u sebi sistematsku supstituciju i eliminaciju, a poznat je pod nazivom Gaussova eliminacija. Prvo se iskoristi prva jednadžba u (3.26) te se  $x_1$  izrazi preko  $(x_2, \dots, x_N)$  i uvrsti u preostalim  $N-1$  jednadžbi. Zatim se prethodno opisani postupak ponavlja sve dok se ne dođe do posljednje jednadžbe u (3.26), koja sadrži samo  $x_N$ , te se tako dobije rješenje za  $x_N$ . Zatim se vraćamo unatrag, prvo do jednadžbe koja sadrži samo  $x_{N-1}$  i  $x_N$  iz koje sada možemo dobiti  $x_{N-1}$ . Proces vraćanja unatrag ponavljamo sve dok ne dobijemo  $x_1$ .

Ovaj proces eliminacije zahtijeva ukupno reda veličine  $N^3$  (pišemo skraćeno)  $O(N^3)$  operacija (množenja i oduzimanja). To je tipična situacija za opći  $N \times N$  linearni sustav koji nema nikakve osobitosti koje se mogu iskoristiti za skraćenje postupka. Stoga, zahtjevi za računalnim vremenom mogu vrlo brzo rasti u slučaju kad je  $N$  veliki (npr.  $N=1000$  ili više nije neobičan slučaj).

Iskazano u matričnoj formulaciji, Gaussova se eliminacija može opisati kao reduciranje redaka matrice  $\mathbf{A}$  u gornju trokutastu matricu (tako da su svi koeficijenti ispod



dijagonale jednaki nuli). Drugim riječima, proces Gaussove eliminacije uzima pogodno višekratnike prvog retka  $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1N})$  te ih oduzima od ostalih redaka kako bi eliminirao prvi stupac u tim redcima. Postupak se zatim ponavlja s drugim, reduciranim retkom  $(0, a'_{22}, \dots, a'_{2N})$  kako bi se drugi stupac uklonio za retke od 3 do  $N$ , itd. Kako to radimo na matrici  $\mathbf{A}$  to istodobno moramo raditi i s odgovarajućim komponentama od  $\mathbf{b}$ , tako da se taj vektor naposljetku pretvara u  $\mathbf{b}'$ . U tom je postupku vektor rješenja sačuvan. Na kraju je rezultat

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1N} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2N} \\ 0 & 0 & a'_{33} & \cdots & a'_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a'_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ \vdots \\ b'_N \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

Tada možemo pisati

$$\begin{aligned} x_N &= \frac{1}{a'_{NN}} b'_N, \\ x_{N-1} &= \frac{1}{a'_{N-1,N-1}} (b'_{N-1} - a'_{N-1,N} x_N), \\ &\dots = \dots \\ x_1 &= \frac{1}{a'_{1,1}} \left( b'_1 - \sum_{j=2}^N a'_{1,j} x_j \right) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Kao bonus, produkt dijagonalnih elemenata od  $\mathbf{A}'$  jednak je determinanti originalne matrice  $\mathbf{A}$ , zato što opisane operacije s redcima ne utječu na vrijednost determinante.

Sve prethodno navedeno moguće je načiniti samo ako su dijagonalni elementi matrice  $\mathbf{A}$  različiti od nule. Ako je  $a_{11} = 0$ , već u prvom koraku nailazimo na problem. Problem ipak nije toliko težak kao što se može na prvi pogled pomisliti. Naime, poredak linearnih jednadžbu u (3.26) nije važan pa možemo jednostavno zamijeniti redak 1 s onim retkom za koji je  $a_{i1} \neq 0$  (ujedno trebamo zamijeniti i odgovarajuće komponente od  $\mathbf{b}$ ) i nastaviti dalje. Pritom se rješenje  $\mathbf{x}$  neće promijeniti. Element  $a_{11}$  naziva se pivotni element ili kratko pivot, a operacija zamjene redaka koja se vrši s ciljem dobivanja pivota različitog od nule naziva se pivotiranje. Pivotiranje se može izvoditi i tijekom procesa Gaussove eliminacije kad god nam to zatreba. Pivotiranje redaka često se izvodi i kada dani pivot nije jednak nuli, ali mu je vrijednost jako mala. To je važno zato što mali pivot može loše utjecati na konačnu preciznost. Ponekad se također izvodi i pivotiranje stupaca. U tom se slučaju ne mijenja  $\mathbf{b}$ , ali je potrebno izvršiti odgovarajuću izmjenu (ili promjenu oznaka) na komponentama vektora rješenja  $x_i$ . Stoga većina složenosti u numeričkoj primjeni Gaussove eliminacije potječe od pivotiranja. Inače je sam postupak vrlo jednostavan, iako ne nužno i najefikasniji. U procesu zamjene redaka i stupaca mijenja se samo predznak determinante, koji možemo odrediti vodeći računa o poretku pivotirajućih elemenata. Ovaj metoda nije najefikasnija pa se rijetko koristi u numeričkom rješavanju matričnih problema. Puno je efikasnija sljedeća metoda.

## Gauss-Jordanova eliminacija

Ovaj je postupak vrlo sličan Gaussovoj eliminaciji. Reduciranje redaka koristi se da bi se matrica  $\mathbf{A}$  pretvorila u dijagonalnu matricu, za razliku od Gaussove metode gdje se pretvarala u gornju trokutastu matricu. Dakle, ista procedura oduzimanja višekratnika redaka radi eliminacije nekih matrice elemenata sada se primjenjuje na sve retke, a ne samo one ispod retka kojeg oduzimamo. Npr. prikladni višekratnici retka 3 ( $a_{31}, a_{32}, \dots, a_{3N}$ ) oduzimaju se od redaka 1, 2 te 4 do  $N$ , kako bi se eliminirao element iz drugog stupca u tim redcima. Ponovo, ako se sve operacije izvedu i na vektoru  $\mathbf{b}$ , rješenje  $\mathbf{x}$  ostaje nepromijenjeno. Stoga na kraju dobijemo

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a'_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a'_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a'_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ \vdots \\ b'_N \end{pmatrix}$$

Tako da je konačno rješenje

$$\begin{aligned} x_N &= \frac{b'_N}{a'_{NN}}, \\ x_{N-1} &= \frac{b'_{N-1}}{a'_{N-1,N-1}}, \\ &\dots = \dots \\ x_1 &= \frac{b'_1}{a'_{1,1}}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Za postizanje ovog rješenja kad god je potrebno možemo koristiti pivotiranje, na isti način kao što je opisano u slučaju Gaussove eliminacije. Gauss-Jordanova eliminacija također zahtijeva  $O(N^3)$  operacija, iako s različitim koeficijentom.

Metoda se može proširiti i na proračun inverzne matrice  $\mathbf{A}^{-1}$ . Kreće se od matrice jednadžbe

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{23} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{23} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{N1} & y_{N2} & \cdots & y_{NN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

u kojoj je matrica  $\mathbf{Y}$  tražena inverzna matrice. Kao direktno proširenje prethodno razmatranog problema i u ovoj se situaciji može oduzimati prikladne višekratnike redaka matrice  $\mathbf{A}$  od drugih redaka matrice  $\mathbf{A}$ , a sve u svrhu svodenja matrice  $\mathbf{A}$  na jediničnu matricu  $\mathbf{A}'$ . Pritom je potrebno izvoditi iste operacije na recima matrice  $\mathbf{B}$  koja se nalazi s desne strane (na početku je to jedinična matrica), pri čemu se ta matrica transformira u matricu  $\mathbf{B}'$

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{23} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{N1} & y_{N2} & \cdots & y_{NN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_{11} & b'_{12} & \cdots & b'_{1N} \\ b'_{21} & b'_{22} & \cdots & b'_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b'_{N1} & b'_{N2} & \cdots & b'_{NN} \end{pmatrix}$$

U ovom se postupku matrica  $\mathbf{Y}$  ne mijenja. Ako sad bilo koji redak pomnožimo s nekim brojem, a pritom isti postupak ponovimo i s odgovarajućim retkom matrice  $\mathbf{B}'$  na desnoj strani prethodna će matricna jednadžba još uvijek biti ispravna, s nepromijenjenom matricom  $\mathbf{Y}$ . Na taj se način može postići da matrica  $\mathbf{A}'$  postane jedinična matrica  $\mathbf{I}$  tada dobivamo da je inverzna matrica  $\mathbf{Y}=\mathbf{A}^{-1}$  jednaka matrici  $\mathbf{B}'$  na desnoj strani

$$\mathbf{B}' = \mathbf{I} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{Y} \quad (3.35)$$

Potprogram za Gauss-Jordanovu eliminaciju s punim pivotiranjem (redci i stupci) može se pronaći u Numerical Recipies:

```
void gaussj(float **a, int n, float **b, int m)
```

`a[1..n][1..n]` je ulazna matrica. `b[1..n][1..m]` je također ulazni podatak koji sadrži  $m$  vektora  $\mathbf{b}$  koji se nalaze s desne strane matricne jednadžbe (3.27). Na izlazu, potprogram umjesto matrice `a` vraća njen inverz, a vektori `b` se zamjenjuju s odgovarajućim skupom vektora rješenja.

### LU dekompozicija

Pristup pod nazivom *LU* dekompozicija također zahtijeva  $O(N^3)$  operacija, ali obično s manjim koeficijentom nego što je to slučaj u Gaussovoj ili Gauss-Jordanovoj eliminaciji. Pretpostavimo da je  $\mathbf{A}$  nesingularna matrica. Isključujući iz razmatranja patološke slučajeve možemo napisati matricu  $\mathbf{A}$  kao produkt donje trokutaste  $\mathbf{L}$  i gornje trokutaste matrice  $\mathbf{U}$ .

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U} \quad (3.36)$$

Izraženo preko matricnih elemenata imamo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ 0 & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta_{nn} \end{pmatrix},$$

gdje ćemo radi jednostavnosti uzeti da je  $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \dots = \alpha_{nn} = 1$ . Određivanje  $\alpha$ -a i  $\beta$ -a je jednostavno ako se ti proračuni izvrše u određenom redosljedu.

Jednom kad se odrede matrice  $\mathbf{L}$  i  $\mathbf{U}$ , može se riješiti  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  u dva koraka. Prvo rješavamo

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

direktnom supstitucijom,

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{1}{\alpha_{11}} b_1 = b_1, \\
y_2 &= \frac{1}{\alpha_{2,2}} (b_2 - \alpha_{21} y_1) = (b_2 - \alpha_{21} y_1), \\
&\dots = \dots \\
y_N &= \frac{1}{\alpha_{N,N}} \left( b_N - \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_{Nj} y_j \right) = \left( b_N - \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_{Nj} y_j \right)
\end{aligned}$$

Kad se izračuna vektor  $\mathbf{y}$ , možemo supstitucijom slično kao u slučaju Gaussove eliminacije riješiti

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1N} \\ 0 & \beta_{22} & \dots & \beta_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}.$$

Rezultati se mogu napisati kao

$$\begin{aligned}
x_N &= \frac{1}{\beta_{NN}} y_N, \\
x_{N-1} &= \frac{1}{\beta_{N-1,N-1}} (y_{N-1} - \beta_{N-1,N} y_N), \\
&\dots = \dots \\
x_1 &= \frac{1}{\beta_{1,1}} \left( y_1 - \sum_{j=2}^N \beta_{1,j} y_j \right)
\end{aligned}$$

Pronalaženje  $x$ -eva i  $y$ -ona zahtijeva  $O(N^2)$  operacija. Međutim proračun  $\alpha$ -a i  $\beta$ -a zahtijeva  $O(N^3)$  operacija pa je ukupni zahtjev opet  $O(N^3)$ . Jedna od prednosti LU dekompozicije je to što jednom kada nađemo matrice  $L$  i  $U$  te iste matrice možemo koristiti za pronalaženje rješenja za bilo koji vektor  $\mathbf{b}$ . Kao korolar, rješavanjem za  $N$  jediničnih vektora  $\mathbf{b}$  dobiva se inverzna matrica  $\mathbf{A}^{-1}$  kao i kod drugih metoda.

Postupak pronalaženja donje i gornje trokutaste matrice opisan je u Numerical Recipes, gdje se mogu pronaći i odgovarajući potprogrami.

```

float **a, *b, d;
int n, *indx;
...
ludcmp(a, n, indx, &d);
lubksb(a, n, indx, b);

```

`ludcmp` matricu `a[1..n][1..n]`, mijenja s  $LU$  dekompozicijom te iste matrice kojoj su ispermutirani redci. `a` i `n` su ulazni podaci. Na izlazu matrica `a` je poredana na sljedeći način

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \alpha_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \beta_{33} \end{pmatrix}.$$

`indx[1..n]` je izlazni vektor koji bilježi podatke o permutacijama redaka koje nastaju djelomičnim pivotiranjem. `d` je također izlazni podatak, a vrijednost mi je  $\pm 1$  ovisno o tome je li broj izmjena redaka bio paran ili neparan.

`ludksb` rješava skup od  $n$  linearnih jednadžbi  $A \cdot X = B$ . `a[1..n][1..n]` je  $LU$  dekompozicija ulazne matrice koja je dobivena s `ludcmp`. `indx[1..n]` je također ulazni vektor permutacija koji je dobiven s `ludcmp`. `b[1..n]` je ulazni vektor  $B$ , koji na izlazu postaje vektor rješenja  $X$ . `a`, `n`, `i` `indx` se ne mijenjaju izvršenjem potprograma pa se mogu koristiti za nove pozive s različitim vektorima `b`. U potprogramu se vodi računa da `b` može početi s mnogo nula pa je korisna za matičnu inverziju.

Inverzna se matrica može pronaći, stupac po stupac, korištenjem sljedećeg koda:

```
#define N ...
float **a, **y, d, *col;
int i, j, *indx;
...
ludcmp(a, N, indx, &d);    Napravite jednu dekompoziciju matrice.
for(j=1; j<=N; j++) {    Pronđite inverz po supcima.
for(i=1; i<=N; i++) col[i]=0.0;
col[j]=1.0;
lubksb(a, N, indx, col);
for(i=1; i<=N; i++) y[i][j]=col[i];
}
```

Matrica `y` sadržavat će inverz originalne matrice `a`, koja je u postupku rješavanja zamijenjena sa svojom dekompozicijom kao što je ranije objašnjeno.

Korištenjem  $LU$  dekompozicije jednostavno je izračunati determinantu matrice jer je ona jednaka umnošku dijagonalnih elemenata gornje i donje trokutaste matrice. Naime,  $\det(A) = \det(LU) = \det(L) \cdot \det(U)$ . Determinanta trokutaste matrice (gornje i donje) jednaka je umnošku dijagonalnih elemenata. U  $LU$  dekompoziciji postojala je određena sloboda u odabiru parametara (više u Numerical Recipes) pa je izabrano da su svi dijagonalni elementi matrice  $L$  jednaki jedinici. Stoga je

$$\det(A) = \prod_{j=1}^N \beta_{jj}.$$

Kod proračuna determinante  $LU$  dekompozicijom treba se sjetiti da smo sa `ludcmp` dobili  $LU$  dekompoziciju matrice kojoj su ispermutirani redci. Međutim, `ludcmp` također vraća i podatak o tome je li broj permutacija paran ili neparan (varijabla `d`) pa je dovoljno pomnožiti prethodni izraz sa `d`.

Za testiranje programa korisno je prvo isprobati male matrice za koje znamo analitičko rješenje.

1. Pronađite inverz od

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -4 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

a) Provjerite da vrijedi  $AA^{-1} = A^{-1}A = 1$ . Ovo je korisna provjera kad ne znamo analitičko rješenje.

b) Provjerite da vrijedi

$$A = \frac{1}{263} \begin{pmatrix} 52 & 17 & 2 \\ -32 & 30 & 19 \\ -9 & -8 & 30 \end{pmatrix}.$$

2. Za istu matricu  $A$  kao u prethodnom zadatku promotrite sljedeći skup linearnih jednadžbi,

$$AX = B$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Vektor  $B$  je poznat (slijede tri primjera), a treba naći nepoznati vektor  $X$ .

$$B_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ -25 \\ 32 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 22 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 20 \\ -30 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

Rješenje bi trebalo biti

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0.312 \\ -0.038 \\ 2.677 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 2.319 \\ -2.965 \\ 4.790 \end{pmatrix}.$$

### Problem svojstvenih vrijednosti

U mnogim situacijama u fizici potrebno je riješiti matricnu jednadžbu,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \lambda \mathbf{X}, \quad (3.37)$$

gdje je  $\mathbf{A}$   $n \times n$  poznata matrica koeficijenata,  $\mathbf{X}$  nepoznati vektor, a  $\lambda$  nepoznata konstanta (skalar). Direktno rješenje  $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$  ne može nam pomoći jer  $\mathbf{B} = \lambda \mathbf{X}$  sadrži nepoznanicu  $\lambda$ . Ovaj je problem svojstvenih vrijednosti teže riješiti nego sustav linearnih jednadžbu jer rješenje postoji samo za neke vrijednosti od  $\lambda$  (ili čak ne postoji, ovisno o  $\mathbf{A}$ ). Ako jednadžbu (3.37) napišemo u obliku

$$[\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}] \cdot \mathbf{X} = 0$$

odmah vidimo da množenje s  $[\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}]^{-1}$  daje trivijalno rješenje  $\mathbf{X} = 0$ . Netrivijalno rješenje postoji samo ako inverzna matrica ne postoji. A inverzna matrica ne postoji ako je determinanta originalne matrice jednaka nuli. To znači da je jednadžba (3.37) ima rješenje ako je

$$\det[\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}] = 0. \quad (3.38)$$

Vrijednosti  $\lambda$  za koje je prethodna relacija ispunjena su svojstvene vrijednosti jednadžbe (3.37). Budući je prethodna jednadžba kad se razvije polinom  $n$ -tog reda u  $\lambda$  to znači da postoji  $n$  svojstvenih vrijednosti (ne nužno različitih). Jednake svojstvene vrijednosti koje odgovaraju višestrukim korijenima jednadžbe (3.38) nazivaju se degeneriranim. Ako nas

zanima samo pronalaženje svojstvenih vrijednosti potreban nam je jedan potprogram koji računa determinantu te jedan koji pomaže u traženju nultočki jednadžbe (3.38). Takav postupak nije međutim najoptimalniji.

Problem svojstvenih vrijednosti prelazi opseg ovog predmeta pa ćemo ovdje samo ukratko naznačiti način numeričkog rješavanja problema te uputiti studente koje zanima više na daljnju literaturu.

Tradicionalan način rješavanja navedenog problema je dijagonalizacija. Navedeni je postupak ekvivalentan sukcesivnim promjenama vektora baze, pri čemu svaka promjena ostavlja svojstvene vrijednosti nepromijenjenim, a istodobno neprekidno smanjuje vrijednosti elemenata matrice  $\mathbf{A}$  koji se nalaze izvan dijagonale. Niz transformacija ekvivalentan je neprekidnom djelovanju na originalnu jednadžbu s matricom  $\mathbf{U}$ :

$$\mathbf{U}\mathbf{A}(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U})\mathbf{X} = \lambda\mathbf{U}\mathbf{X},$$

$$(\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^{-1})(\mathbf{U}\mathbf{X}) = \lambda(\mathbf{U}\mathbf{X}),$$

sve dok matrica  $\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^{-1}$  ne postane dijagonalna:

$$\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^{-1} = \begin{pmatrix} a'_{11} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ 0 & a'_{22} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & a'_{33} & \dots \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix}.$$

Vrijednosti od  $\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^{-1}$  duž dijagonale su tada svojstvene vrijednosti početnog problema. Nadalje, može se izabrati transformaciju tako da vektori  $\mathbf{U}\mathbf{X}$  budu vektori baze:

$$\mathbf{U}\mathbf{X}_i = \mathbf{e}_i$$

pa su svojstveni vektori

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{e}_i.$$

To znači da su svojstveni vektori stupci matrice  $\mathbf{U}^{-1}$ . U bibliotekama potprograma kao što su Numerical Recipes mogu se pronaći potprogrami koji su ovog tipa. Zainteresirani studenti prije proučavanja numeričkih metoda mogu u Dodatku A, kroz neke geometrijske i fizikalne primjere, saznati nešto više o matricama, ortogonalnim transformacijama, problemu svojstvenih vrijednosti te dijagonalizaciji.

Primjeri programa dostupni su na web stranici predmeta:  
[www.pmfst.hr/~leandra/mmf1/programi](http://www.pmfst.hr/~leandra/mmf1/programi).

## ***Interpolacija i ekstrapolacija.***

Ponekad nam se dogodi da znamo vrijednost funkcije  $f(x)$  za niz točaka  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , ali ne poznajemo analitički izraz za  $f(x)$  koji bi nam omogućio proračun funkcije u proizvoljnoj točki  $x$ . To se događa kad se npr. vrijednosti  $f(x_i)$  odrede fizikalnim mjerenjem ili dugačkim numerički proračunom koji se ne može iskazati analitički.

Osnovni zadatak:

Procijeniti vrijednost  $f(x)$  za proizvoljni  $x$ , tako da se nacrtava glatka krivulja kroz sve točke.

Ako je  $x$  između najvećeg i najmanjeg  $x_i$ -a tada govorimo o *interpolaciji*, a ako je izvan tog opsega o *ekstrapolaciji*.

Najčešće korištenje funkcije su polinomi.

Korisno je imati metodu za ova dva postupka koja ujedno daje i procjenu greške.

Metode:

- 1) Odrediti interpolacijsku funkciju korištenjem skupa točaka  $x_i, f(x_i)$ , a zatim izračunati vrijednost u točki  $f(x)$ . Ovaj postupak se ne preporučuje zbog:
  - Slabe efikasnosti
  - Grešaka zaokruživanja
  - Nema procjene greške
- 2) Početi s  $f(x_i)$  za  $x_i$  koji su blizu  $x$ -a, a zatim dodavati korekcije od  $x_i$  koji su na većoj udaljenosti. Sukcesivne korekcije trebale bi se smanjivati te se veličina zadnje korekcije može koristiti kao procjena greške.
  - Ako postupak interpolacije koristi samo skup točaka  $x_i$  koji su blizu  $x$ -a, koeficijenti interpolirajuće funkcije mijenjat će se od jednog raspona vrijednosti argumenta do drugog. Rezultantna funkcija bit će tada neprekidna, ali to neće vrijediti za njenu derivaciju.
  - Ako su neprekidne derivacije bitne, mogu se koristiti spline funkcije (kao npr. kubični spline). One su uglavnom stabilnije od polinoma (manje su sklone divljim oscilacijama)
  - Broj korištenih točaka u tablici (minus jedna) predstavlja red interpolacije. Povišenje reda **ne** vodi na veću preciznost. Preporuka je ne koristiti red  $> 5$ .
  - Ekstrapolacije su vrlo riskantne. Ne treba im vjerovati na udaljenosti od zadnjeg  $x_i$  koja je veća od tipičnog razmaka između  $x_i$ .

### Polinomna interpolacija

Kroz bilo koje dvije točke možemo provući jedinstveni pravac. Ako imamo tri točke, tada kroz njih prolazi jedinstvena kvadratična formula itd.

Kroz bilo koji skup od  $N$  točaka postoji jedinstveni polinom reda  $N-1$  koji prolazi kroz te točke. Definiran je Lagrangeovom formulom:

$$P(x) = \sum_{i=1}^N \left( \prod_{j=1, j \neq i}^N \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) y_i, \quad (3.39)$$

gdje su  $y_i=f(x_i)$  ordinate točaka kroz koje prolazi polinom. Vidimo da je polinom dan kao suma  $N$  članova od kojih je svaki polinom reda  $N-1$  koji ima vrijednost 0 u svim točkama osim u točki  $x_i$  u kojoj poprima vrijednost  $y_i$ .

Bolja metoda određivanja polinoma kreće od polinoma reda 0  $P_i = y(x_i)$ . Zatim se dodaju jedna po jedna korekcije susjednih točaka, pri čemu se sukcesivno povećava red polinoma. Svaki se izraz može odrediti rekurzivnom relacijom koja je dana u Numerical Recipes (Nevilleov algoritam), a ovdje ćemo je ukratko objasniti.

Neka je  $P_1$  vrijednost u točki  $x$  jedinstvenog polinoma reda 0 koji prolazi kroz točku  $(x_1, y_1)$ .

To znači da je  $P_1 = y_1$ . Na analogan način definiramo i ostale  $P_i$ . Neka je  $P_{12}$  vrijednost u točki  $x$  jedinstvenog polinoma reda 1 koji prolazi kroz točke  $(x_1, y_1)$  i  $(x_2, y_2)$ . Na isti način definiramo i ostale  $P_{i(i+1)}$  za  $i$  koji ide od 2 do  $N-1$ . Nastavljamo na analogan način s definiranjem jednoznačnih polinoma višeg reda sve do  $P_{123..N}$ , gdje je  $N$  ukupni broj točaka. Različiti  $P$ -ovi čine „tablicu“ s „predcima“ na lijevo koji vode na jednoznačnog „potomka“ na desnoj strani. Primjer sa  $N=4$  dan je u izrazu (3.40).



$$\begin{array}{rcl}
x_1 : & y_1 = P_1 & \\
& & P_{12} \\
x_2 : & y_2 = P_2 & P_{123} \\
& & P_{23} \quad P_{1234} \\
x_3 : & y_3 = P_3 & P_{234} \\
& & P_{34} \\
x_4 : & y_4 = P_4 &
\end{array} \tag{3.40}$$

Nevilleov algoritam je rekurzivni način popunjavanja navedene tablice, stupac po stupac, krećući s lijeve strane. Zasniva se na odnosu između „potomka“  $P$  i njegova dva „roditelja“,

$$P_{i(i+1)\dots(i+m)} = \frac{(x - x_{i+m})P_{i(i+1)\dots(i+m-1)} + (x_i - x)P_{(i+1)(i+2)\dots(i+m)}}{x_i - x_{i+m}} \tag{3.41}$$

a može se dokazati matematičkom indukcijom. Dva se „roditelja“ već slažu u točkama  $x_{i+1} \dots x_{i+m-1}$  pa se odmah vidi da prethodni izraz funkcionira u tim točkama. Prethodni se izraz može napisati i kao

$$\begin{aligned}
P_{i(i+1)\dots(i+m)} &= \lambda P_{i(i+1)\dots(i+m-1)} + (1 - \lambda)P_{(i+1)(i+2)\dots(i+m)}, \\
\lambda &= \frac{(x - x_{i+m})}{x_i - x_{i+m}}.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

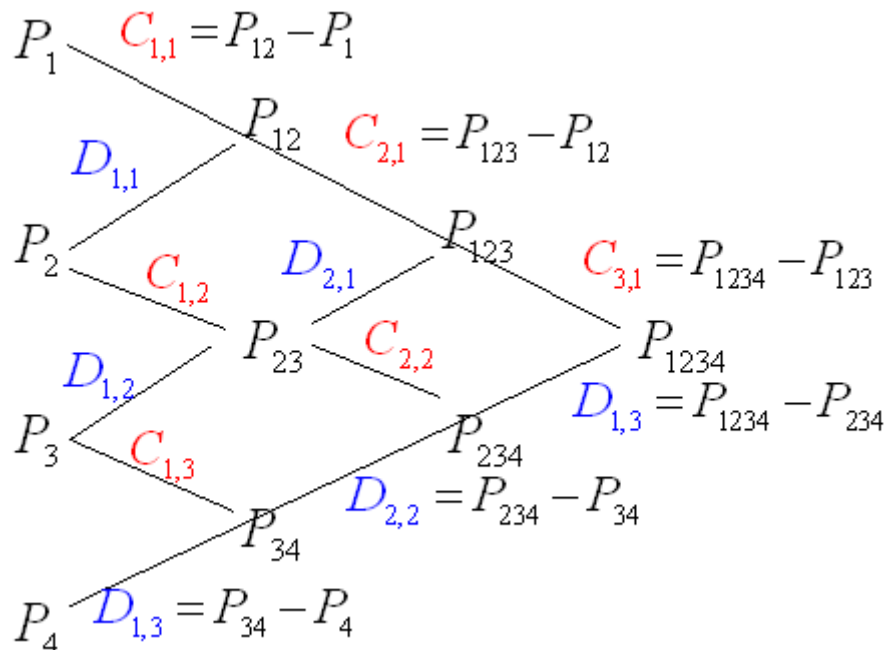
Odmah se vidi da u slučaju  $m=1$  dobivamo jednadžbu pravca.

Rekurzivna relacija (3.41) može se poboljšati ako vodimo računa o malim razlikama između roditelja i potomaka, odnosno ako definiramo za  $m=1, 2, \dots, N-1$ ,

$$C_{m,i} \equiv P_{i\dots(i+m)} - P_{i\dots(i+m-1)}$$

$$D_{m,i} \equiv P_{i\dots(i+m)} - P_{(i+1)\dots(i+m)}$$

Na crtežu Crt. 45 prikazan je odnos između  $C$ 'ova,  $D$ 'ova i aproksimacija polinoma  $P_{123\dots N}$ .



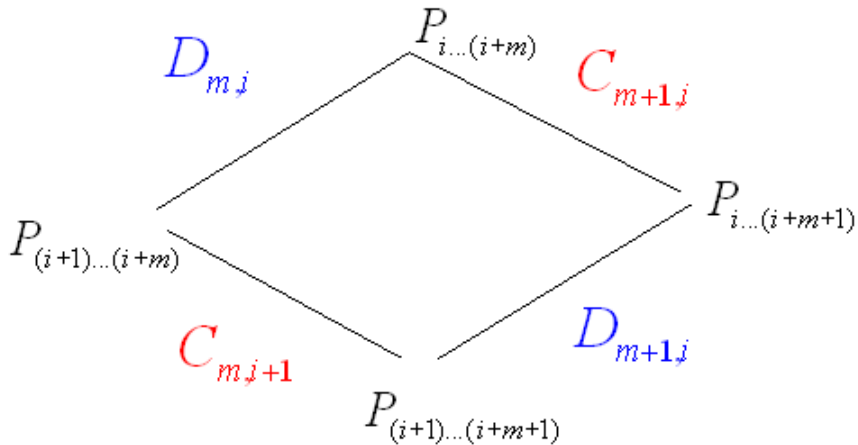
Crt. 45 Nevilleov algoritam

Tada se iz (3.41) lako može dobiti izraze

$$D_{m+1,i} = \frac{(x_{i+m+1} - x)(C_{m,i+1} - D_{m,i})}{x_i - x_{i+m+1}}$$

$$C_{m+1,i} = \frac{(x_i - x)(C_{m,i+1} - D_{m,i})}{x_i - x_{i+m+1}}$$
(3.43)

U dokazu može poslužiti i Crt. 46.



**Crt. 46** Skica uz dokaz izraza (3.43).

Na primjer,

$$C_{m+1,i} = P_{i...(i+m+1)} - P_{i...(i+m)} = \lambda P_{i...(i+m)} - (1 - \lambda) P_{(i+1)...(i+m+1)} - P_{i...(i+m)}$$

$$= (1 - \lambda) (P_{(i+1)...(i+m+1)} - P_{i...(i+m)})$$

$$= (1 - \lambda) [(P_{(i+1)...(i+m+1)} - P_{(i+1)...(i+m)}) - (P_{i...(i+m)} - P_{(i+1)...(i+m)})]$$

$$= (1 - \lambda) (C_{m,i+1} - D_{m,i})$$

U svakom koraku,  $C$ -ovi i  $D$ -ovi su korekcije koje čine interpolaciju jedan red većom. Konačni je odgovor  $P_{123..N}$ , jednak sumi bilo kojeg  $y_i$  sa skupom  $C$ -ova i/ili  $D$ -ova koji čine putanju kroz obiteljsko stablo (Crt. 45) do krajnjeg potomka na desnoj strani.

Potprogram za polinomnu interpolaciju koji kreće od  $N$  ulaznih točaka dan je u Numerical Receptions. Pretpostavlja se da sva ulazna polja kreću od 1.

Numerical Receptions

```
void polint(float xa[], float ya[], int n, float x, float *y, float *dy)
```

vraća:

- $y$  procjena od  $f(x)$ , pri čemu je dana tablica s  $n$  vrijednosti za  $x_i$  u polju  $xa[n]$  i  $n$  vrijednosti od  $f(x_i)$  u polju  $ya[n]$ .
- $dy$  zadnja primijenjena korekcija koja se može koristiti za procjenu greške

*Interpolacija racionalnim funkcijama*

Neke funkcije bolje aproksimiraju kvocijenti polinoma:

$$R(x) = \frac{P_\mu(x)}{Q_\nu(x)} = \frac{p_0 + p_1x + \dots + p_\mu x^\mu}{q_0 + q_1x + \dots + q_\nu x^\nu} \quad (3.44)$$

- Ovim se oblikom mogu modelirati polovi (nultočke nazivnika)
- $R(x)$  prolazi kroz  $N$  točaka, gdje je  $N = \mu + \nu + 1$
- Razvijene su rekurzivne relacije, slično kao u slučaju polinomne interpolacije, za određivanje  $p_\mu$  i  $q_\nu$  u slučaju kada je :

$$\mu = \nu = (N - 1) / 2 \quad \text{za neparni } N$$

$$\mu + 1 = \nu = N / 2 \quad \text{za parni } N$$

Ovdje nećemo ulaziti u detalje. Potprogram koji možete isprobati opisan je u Numerical Recipes:

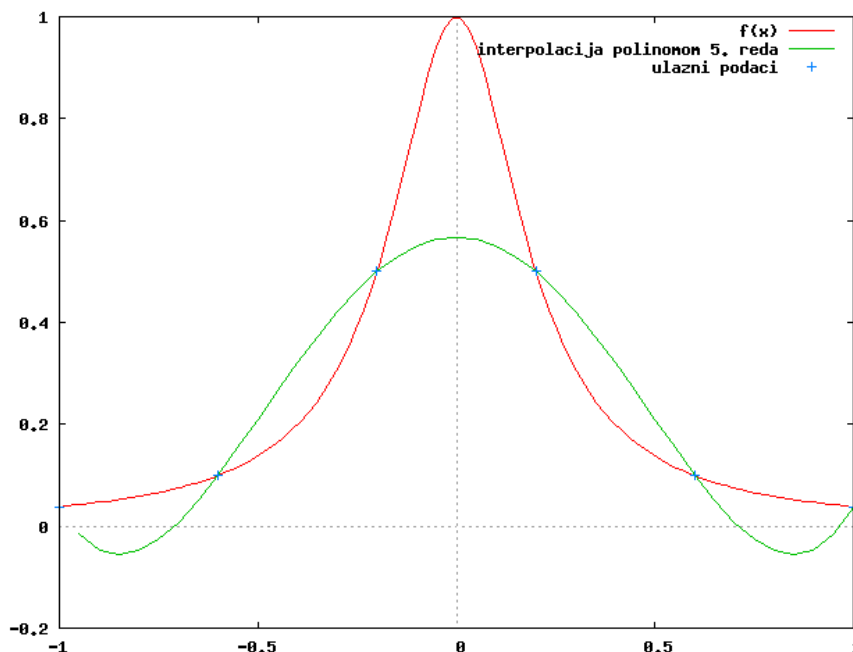
```
void ratint(float xa[], float ya[], int n, float x, float *y, float *dy)
```

vraća:

- $y$  procjena od  $f(x)$ , pri čemu je dana tablica s  $n$  vrijednosti za  $x_i$  u polju  $xa[n]$  i  $n$  vrijednosti od  $f(x_i)$  u polju  $ya[n]$ .
- $dy$  zadnja primijenjena korekcija koja se može koristiti za procjenu greške

### Kubična spline interpolacija

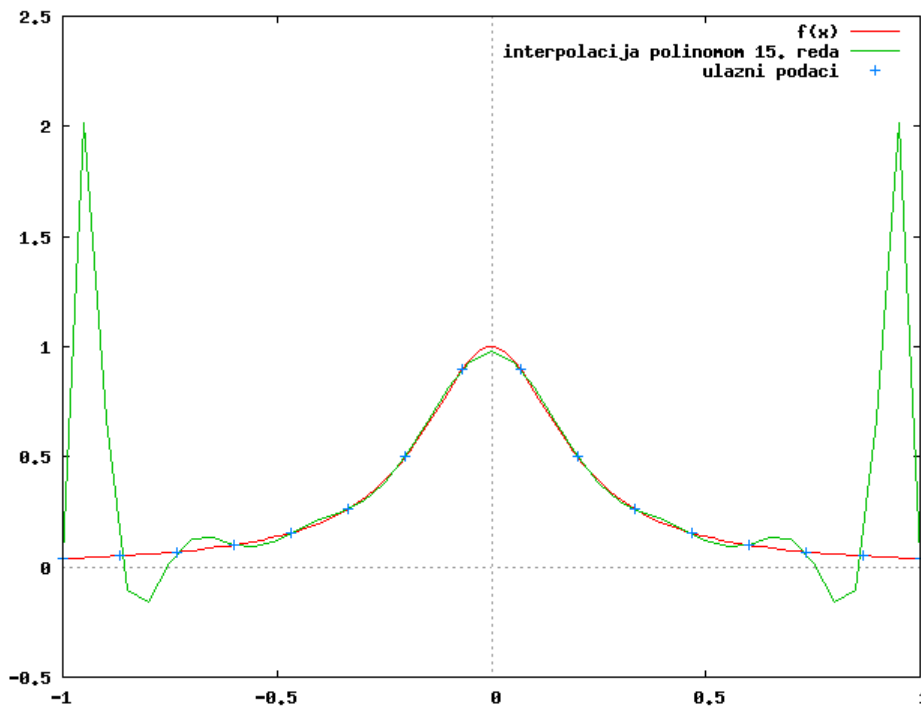
Interpolacije polinomima nisu uvijek dobro rješenje. Promotrit ćemo to na primjeru interpolacije funkcije  $f(x) = 1/(1 + 25x^2)$  na intervalu od  $[-1:1]$  korištenjem 6 točaka. Crt. 47 prikazuje rezultat koji nimalo zadovoljavajući.



Crt. 47 Interpolacija polinomom 5. reda

Štoviše, za neke je točke greška koju metoda procjenjuje veća od rezultata. Mogli bismo promisliti da ćemo bolji rezultat postići korištenjem višeg reda polinomne aproksimacije, međutim to nije slučaj. Crt. 48 na kojem je prikazana interpolacija polinomom

15. reda koja koristi 16 jednako udaljenih točaka pokazuje kako se u jednom dijelu aproksimacija poboljšava, u drugom je dijelu (na rubovima) značajno lošije kvalitete.



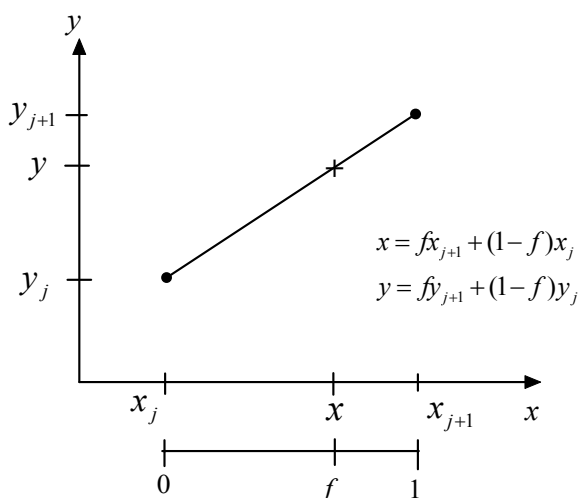
Crt. 48 Interpolacija polinomom 15. reda

U ovim je situacijama rješenje spline aproksimacija koja interpolira podatke lokalno s polinomima, a globalno ostaje blizu podacima (pa tako i pravoj vrijednosti funkcije) tako što povezuje interpolirane segmente na način da su funkcija i njena prva i druga derivacija neprekidne. Uglavnom se koriste linearna, kvadratična i kubična spline aproksimacija, ali je najčešća upravo kubična spline aproksimacija.

Napominjemo da metoda ne daje procjenu greške i ne može se koristiti za ekstrapolaciju.

Neka nam je dana funkcija u tabličnom obliku  $y_i = y(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Započnimo s linearnom spline interpolacijom, koja je u stvari samo spajanje susjednih točaka pravicima. Usmjeriti ćemo se na interval od  $x_j$  do  $x_{j+1}$ .



Crt. 49 Linearna interpolacija

$$y = \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} y_j + \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} y_{j+1} \quad (3.45)$$

Jednadžba (3.45) (isto što i relacije na Crt. 49) posebni je slučaj Lagrangeovog interpolacijskog polinoma.

Ovako dobivena linearna interpolacijska funkcija ima  $y''=0$  (zbog linearnosti u dijelovima) unutar intervala i tipično  $y''$  nedefiniran na rubovima.

Cilj je kubične spline interpolacije postići funkciju koja će imati glatku prvu derivaciju i neprekidnu drugu derivaciju, i to ne samo unutar intervala nego i na rubovima.

Kad bismo imali iskazanu i drugu derivaciju u tabličnom obliku,  $y''_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  tada bismo mogli unutar svakog intervala desnoj strani relacije (3.45) dodati kubični polinom čija druga derivacija ima linearnu ovisnost od točke do točke u tablično zapisanoj funkciji. Radeći na taj način postizemo neprekidnost druge derivacije. Kubični polinom mora dati vrijednost nula u točkama  $x_j$ . Postoji jednoznačno rješenje prethodno opisanog problema,

$$y(x) = f y_{j+1} + (1-f) y_j + g y_{j+1}'' + h y_j'', \quad (3.46)$$

gdje su

$$\begin{aligned} f &= \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} \\ g &= \frac{1}{6} f(f-1)(f+1)(x_{j+1} - x_j)^2 \\ h &= \frac{1}{6} f(f-1)(f-2)(x_{j+1} - x_j)^2 \end{aligned} \quad (3.47)$$

Jasno je vidljivo da su ovi dodatni članovi nula na rubovima intervala (tamo je  $f=0$  ili  $f=1$ ). U relaciji (3.46) ovisnost o  $x$ -u ulazi kroz lineare članove ( $f$ ) i kubične članove ( $f^3$ ). Također odmah se vidi da je:

$$y'' = f y_{j+1}'' + (1-f) y_j'' \quad (3.48)$$

U cijelom ovom postupku postoji jedan problem: vrijednosti  $y''_i$  obično su nepoznate.

Međutim, mi još nismo iskoristili neprekidnost prve derivacije na granici dva intervala. Osnovna je ideja spline aproksimacije zahtijevati neprekidnost prve derivacije i iz tog zahtjeva dobiti relacije za druge derivacije  $y''_i$ .

Iz zahtjeva da prve derivacije budu neprekidne dobiju se sljedeći izrazi:

$$\frac{x_j - x_{j-1}}{6} y_{j-1}'' + \frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{6} y_j'' + \frac{x_{j+1} - x_j}{6} y_{j+1}'' = \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j} - \frac{y_j - y_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}. \quad (3.49)$$

Prethodni skup relacije čini  $N-2$  linearnih jednadžbi za  $N$  nepoznanica  $y''_i, i=1, \dots, N$ . Slijedi da imamo dva neodređena parametra. Najčešći načini za određivanje jednoznačnog rješenja su:

- 1) staviti  $y''_1 = y''_N = 0$  (prirodni spline)
- 2) dati vrijednosti prvih derivacija u rubnim točkama  $y'_1$  i  $y'_N$  (iz relacija za prvu derivaciju onda se odredi druga derivacija na rubu)

Skup jednadžbi (3.49) je tridijagonalan (svaki  $y''_i$  vezan je samo uz svoja dva prva susjeda), što je jedan od razloga zbog kojih su kubične spline funkcije osobito praktične. Naime, u tom se slučaju može pronaći rješenje linearnog sustava jednadžbi u  $O(N)$  operacija.

Numerical Recipes:

Prvo treba pozvati sljedeći potprogram jednom kako bi se izračunale druge derivacije za točke u tablici:

```
void spline(float x[], float y[], int n, float yp1, float ypn, float y2[])
```

gdje

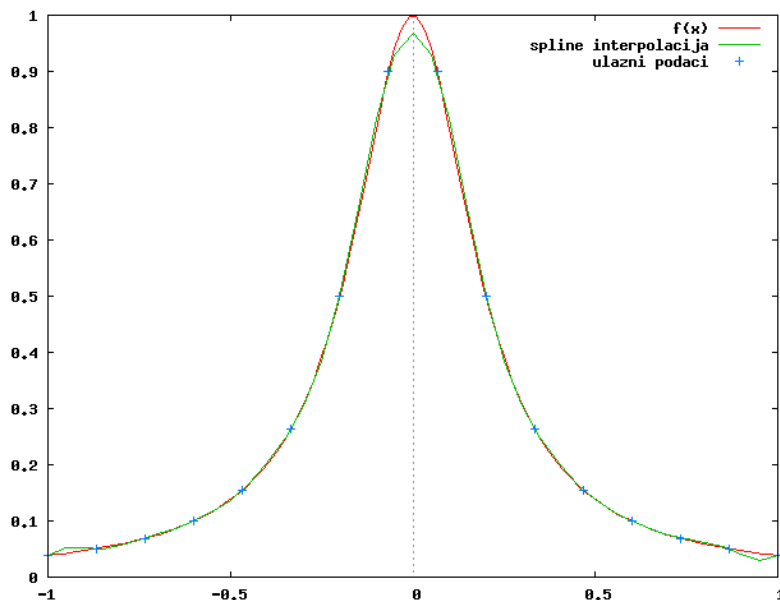
yp1 i ypn sadrže prve derivacije na krajnjim točkama. Ako su veće od  $10^{30}$ , onda se pretpostavljaju druge derivacije jednake nuli.

y2 je polje drugih derivacija

Zatim se poziva sljedeći potprogram (koliko god puta se želi) koji računa interpoliranu funkciju za bilo koju točku x.

```
void splint(float xa[], float ya[], float y2a[], int n, float x, float *y)
```

Rezultati spline interpolacije funkcije  $f(x) = 1/(1 + 25x^2)$  na intervalu [-1:1] prikazani su na Crt. 50. U ovom je slučaju povećanje ulaznih podataka dovelo do značajnog poboljšanja interpolacije.



Crt. 50 Spline aproksimacija korištenjem 16 ulaznih podataka.

Primjeri programa dostupni su na web stranici predmeta:  
[www.pmfst.hr/~leandra/mmfl1/programi](http://www.pmfst.hr/~leandra/mmfl1/programi).

## Numeričko integriranje

Problem: Integriranje spektra

Pretpostavimo da smo izmjerili  $dN(t)/dt$ , broj čestica po jediničnom vremenu koje ulaze u detektor, kao funkciju vremena. Želimo utvrditi koliko je čestica ušlo u detektor u prvoj sekundi. Stoga trebamo integrirati eksperimentalno dobiveni spektar

$$N(1) = \int_0^1 \frac{dN}{dt}(t) dt \quad (3.50)$$

Mi ćemo kao probu integrirati eksponencijalni spektar, ali će metoda koju ćemo koristiti vrijediti i u slučaju integriranja funkcije zadane u tabličnom obliku.

Model: Sumiranje „kutija“

Riemann definira integral kao sumu po kutijama širine  $h$ , u granici kada širina kutija teži u nulu

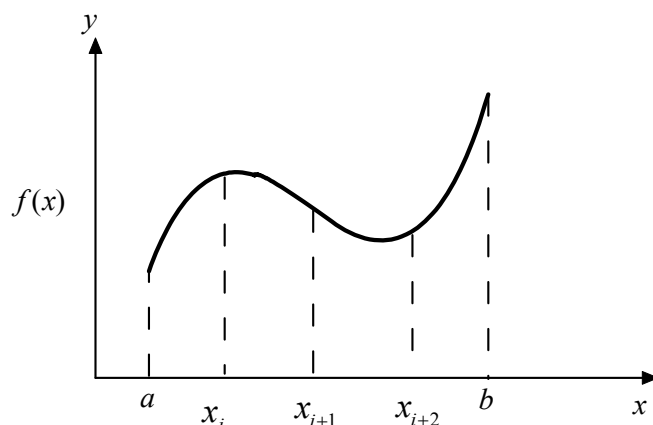
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ h \sum_{i=1}^{(b-a)/h} f(x_i) \right] \quad (3.51)$$

U našem je problemu funkcija  $f$  eksperimentalno određeni spektar  $f(x) = dN(t)/dt$ .

Integral funkcije  $f$  numerički aproksimiramo sumom po kutijama:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^N f(x_i)w_i \quad (3.52)$$

U prethodnom se izrazu  $f$  računa u  $N$  točaka u intervalu  $[a, b]$ , a vrijednosti  $f_i \equiv f(x_i)$  se množe s „težinskim“ faktorom  $w_i$ . Iako je suma (3.52) egzaktna samo u granici kada  $N \rightarrow \infty$ , za mnoge se funkcije vrlo precizni rezultati mogu dobiti za konačni  $N$ .



**Crt. 51** Integral  $\int_a^b f(x)dx$  je površina ispod grafa funkcije  $f(x)$  od  $a$  do  $b$ . Na crtežu smo razbili površinu u četiri područja jednake širine.

Različiti algoritmi integriranja razlikuju se u načinima na koje odabiru točke  $x_i$  i težine  $w_i$ . Općenito, greške se smanjuju povećanjem broja koraka  $N$ , sve dok greške zaokruživanja ne ograniče preciznost. Broj potrebnih koraka za postizanje najveće preciznosti ovisi o funkciji  $f(x)$ .

Najjednostavniji algoritmi kreću od aproksimacije integranda s nekoliko članova u Taylorovom redu funkcije  $f$ , koji se integriraju. Osim u slučajevima kada integrand ima vrlo čudno ponašanje u intervalima, dodavanje sukcesivnih članova Taylorovog reda povećava preciznost. Ovakve se metode nazivaju Newton-Cotsove metode. Ukupni interval integracije podijeli se u jednake podintervale širine  $h$  kao što je prikazano na Crt. 51. Integral se evaluira u jednako udaljenim točkama  $x_i$ . Primjeri ovih algoritama su trapezna formula i Simpsonova formula. Dobar su izbor kad je integrand dan u tabličnoj formi duž jednako razmaknutih točaka. Također ove metode omogućavaju izbjegavanje katastrofe u slučaju funkcija koje

imaju singularitete. Međutim, u svakom je slučaju bolje ukloniti singularitete prije postupka numeričkog integriranja. Npr.

$$\int_{-1}^1 |x| f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_{-1}^0 f(-x) dx,$$

$$\int_0^1 \frac{f(x) dx}{\sqrt{1-x}} = 2 \int_0^1 f(1-y^2) dy \quad (y^2 = 1-x)$$

Slično, ako se integrand sporo mijenja u nekom području, onda promjenom varijabli to područje možemo suziti i uzeti svega nekoliko točaka za procjenu integrala. Isto tako, ako se integrand u nekom području brzo mijenja onda zamjenom varijabli to područja treba povećati i uzeti veći broj točaka.

### Metoda 1: Trapezno pravilo

Trapezno i Simpsonovo pravilo uzimaju vrijednosti funkcije  $f(x)$  u jednoliko razmaknutim točkama  $x_i (i=1, \dots, N)$  u području  $[a, b]$  i uključuju krajnje točke. Udaljenost susjednih točaka je  $h$ , pa to znači da ima  $N-1$  interval duljine  $h$ :

$$h = \frac{b-a}{N-1}, \quad (3.53)$$

$$x_i = a + (i-1)h, \quad i = 1, \dots, N$$

Iz Crt. 52 vidimo da trapezno pravilo uzima interval integracije  $i$  i u njemu konstruira trapez širine  $h$ . Na taj se način funkcija  $f(x)$  aproksimira na intervalu  $i$  s pravcem. To znači da se uzima prosječna visina funkcije  $f$  na tom intervalu  $(f_i + f_{i+1})/2$ . Površina jednog trapeza je

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x) dx \approx \frac{h(f_i + f_{i+1})}{2} = \frac{1}{2} h f_i + \frac{1}{2} h f_{i+1} \quad (3.54)$$

Iskazano preko standardne integracijske formule (3.52), „pravilo“ (3.54) je za  $N=2$  točke s težinama  $w_i = 1/2$ .

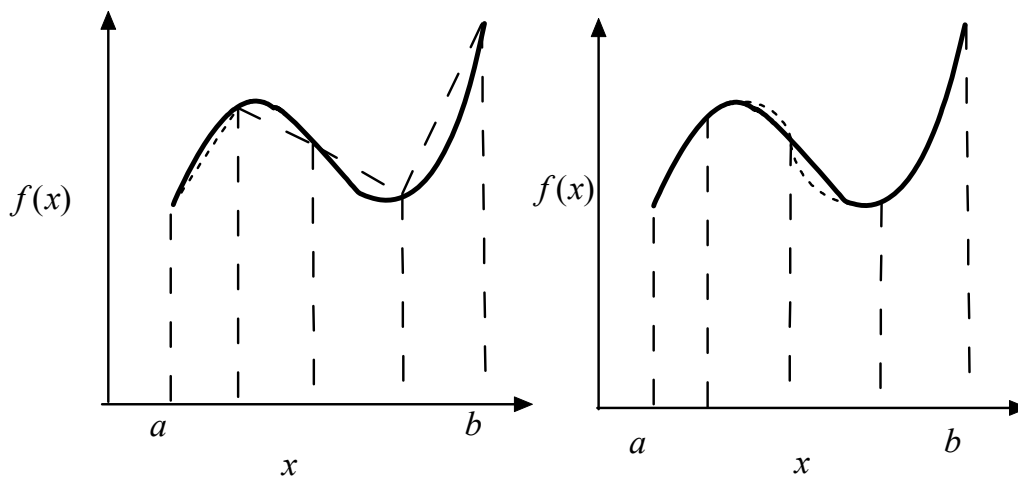
Da bismo primijenili trapezno pravilo na cijelo područje  $[a, b]$  potrebno je zbrojiti doprinose svih podintervala:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} f_1 + h f_2 + h f_3 + \dots + h f_{N-1} + \frac{h}{2} f_N \quad (3.55)$$

Zbog činjenice da se svaka unutarnja točka broji dvaput, ona ima težinu  $h$ , dok vanjske točke imaju težinu  $h/2$ . Iskazano preko standardnog integracijskog pravila

$$w_i = \left\{ \frac{h}{2}, h, h, \dots, h, \frac{h}{2} \right\} \quad (3.56)$$





**Crt. 52** Lijevo su prikazani segmenti pravaca koji se koriste u trapeznom pravilu, a desno segmenti parabola koje se koriste u Simpsonovom pravilu.

### Metoda 2: Simpsonovo pravilo

U Simpsonovom pravilu aproksimiramo funkciju  $f(x)$  s parabolom

$$f(x) \approx \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \quad (3.57)$$

u svakom intervalu, uz napomenu da su i ovdje širine svih intervala jednake. Površina svakog intervala tada je integral te parabole

$$\int_{x_i}^{x_i+h} (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) dx = \frac{\alpha x^3}{3} + \frac{\beta x^2}{2} + \gamma x \Big|_{x_i}^{x_i+h}. \quad (3.58)$$

Ovaj je postupak ekvivalentan integriranju Taylorovog reda uključivo s kvadratnim članom. Kako bismo povezali parametre  $\alpha, \beta$  i  $\gamma$  s funkcijom  $f(x)$ , promotrit ćemo interval od -1 do 1.

$$\int_{-1}^1 (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) dx = \frac{2\alpha}{3} + 2\gamma.$$

Uočavamo da je

$$\begin{aligned} f(-1) &= \alpha - \beta + \gamma, & f(0) &= \gamma, & f(1) &= \alpha + \beta + \gamma, \\ \Rightarrow \alpha &= \frac{f(1) + f(-1)}{2} - f(0), & \beta &= \frac{f(1) - f(-1)}{2}, & \gamma &= f(0). \end{aligned}$$

Stoga slijedi da se integral može izraziti kao suma preko vrijednosti funkcije u tri točke pomnožena s odgovarajućim težinama.

$$\int_{-1}^1 (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) dx = \frac{f(-1)}{3} + \frac{4f(0)}{3} + \frac{f(1)}{3}.$$

Iz razloga što su potrebne tri točke rezultat generaliziramo tako što integral numerički računamo na dva susjedna intervala pa tako uzimo jednu točku u sredini i dvije na rubovima:

$$\int_{x_i-h}^{x_i+h} f(x) dx = \int_{x_i}^{x_i+h} f(x) dx + \int_{x_i-h}^{x_i} f(x) dx \approx \frac{h}{3} f_{i-1} + \frac{4h}{3} f_i + \frac{h}{3} f_{i+1} \quad (3.59)$$

Simpsonovo pravilo stoga zahtijeva elementarnu integraciju preko parova intervala a to znači da broj intervala mora biti paran, odnosno da broj točaka mora biti neparan. Za dobivanje vrijednosti integrala preko cijelog područja, zbrajamo doprinose svakog od parova podintervala, zbrajajući pritom sve rubne točke osim prve i zadnje dvaput:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} f_1 + \frac{4h}{3} f_2 + \frac{2h}{3} f_3 + \frac{4h}{3} f_4 + \dots + \frac{4h}{3} f_{N-1} + \frac{h}{3} f_N. \quad (3.60)$$

Izraženo preko uobičajenog integracijskog pravila, imamo

$$w_i = \left\{ \frac{h}{3}, \frac{4h}{3}, \frac{2h}{3}, \frac{4h}{3}, \dots, \frac{4h}{3}, \frac{h}{3} \right\}$$

Suma svih težima korisna je provjera cijelog postupka integracije

$$\sum_{i=1}^N w_i = (N-1)h.$$

Ne treba zaboraviti vrlo važnu činjenicu: broj točaka  $N$  mora biti neparan.

### Procjena greške

Općenito, želimo izabrati integracijsko pravilo koje nam daje točan odgovor uz korištenje što manje integracijskih točaka. Osjećaj o apsolutnoj algoritamskoj grešci (ili grešci aproksimacije)  $E$  i relativnoj grešci  $\varepsilon$  možemo dobiti razvijanjem funkcije  $f(x)$  u Taylorov red oko sredine intervala integracije. Zatim pomnožimo dobivenu grešku s brojem intervala  $N$  kako bismo procijenili grešku cijelog integrala preko  $[a, b]$ . Za trapezno i Simpsonovo pravilo to nam daje

$$\begin{aligned} E_t &= O\left(\frac{[b-a]^3}{N^2}\right) f^{(2)}, \\ E_s &= O\left(\frac{[b-a]^5}{N^4}\right) f^{(4)}, \\ \varepsilon_{t,s} &= \frac{E_{t,s}}{f}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Član s trećom derivacijom u Simpsonovom pravilu poništi se i najniži je član s četvrtom derivacijom. Relacije (3.61) pokazuju da se s naprednijom metodom integracije dolazi do greške koja opada s većom potencijom od  $N$ , ali koja je istodobno proporcionalna većoj derivaciji od  $f$ . Stoga bi za male intervale i funkcije kojima se više derivacije dobro ponašaju Simpsonovo pravilo trebalo voditi na bržu konvergenciju od trapezno pravila.

Uz grešku aproksimacije pojavljuje se i greška zaokruživanja. Pretpostavimo li da je ta greška slučajna nakon  $N$  koraka ona ima oblik

$$\varepsilon_{ro} \approx \sqrt{N} \varepsilon_m, \quad (3.62)$$

gdje je  $\varepsilon_m$  preciznost računala ( $\sim 10^{-7}$  za jednostruku preciznosti i  $\sim 10^{-15}$  za dvostruku preciznost). Trebamo odrediti  $N$  koji minimizira ukupnu grešku

$$\varepsilon_{tot} = \varepsilon_{ro} + \varepsilon_{approx}.$$

U cilju okvirne procjene  $N$ -a, napraviti ćemo niz aproksimacija. Optimalni  $N$  dobiva se, približno, onda kad su obje greške jednakog iznosa. Pretpostavimo (ovo je aproksimacija) da se to događa onda kad su te dvije greške jednake. Nadalje, pretpostavimo i da je

$$\frac{f^{(n)}}{f} \approx 1,$$

a skalu duljine odredimo pretpostavkom

$$b - a = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{N}.$$

Izjednačavanjem greške aproksimacije s greškom zaokruživanja dobivamo za trapezno pravilo:

$$\begin{aligned} \sqrt{N} \varepsilon_m &\approx \frac{f^{(2)}(b-a)^3}{fN^2} = \frac{1}{N^2} \\ \Rightarrow N &\approx \frac{1}{(\varepsilon_m)^{2/5}} \end{aligned} \quad (3.63)$$

To znači da je u slučaju trapeznog pravila

$$N = \frac{1}{h} = \begin{cases} (1/10^{-7})^{2/5} = 631, & \text{za jednostruku preciznost} \\ (1/10^{-15})^{2/5} = 10^6, & \text{za dvostruku preciznost} \end{cases} \quad (3.64)$$

Odgovarajuće greške su

$$\varepsilon_{ro} \approx \sqrt{N} \varepsilon_m = \begin{cases} 3 \times 10^{-6}, & \text{za jednostruku preciznost} \\ 10^{-12}, & \text{za dvostruku preciznost} \end{cases} \quad (3.65)$$

Ako isti postupak primijenimo na Simpsonovo pravilo dobivamo

$$N = \frac{1}{h} = \begin{cases} (1/10^{-7})^{2/9} = 36, & \text{za jednostruku preciznost} \\ (1/10^{-14})^{2/5} = 2154, & \text{za dvostruku preciznost} \end{cases} \quad (3.66)$$

Odgovarajuće greške su:

$$\varepsilon_{ro} \approx \sqrt{N} \varepsilon_m = \begin{cases} 6 \times 10^{-7}, & \text{za jednostruku preciznost} \\ 5 \times 10^{-14}, & \text{za dvostruku preciznost} \end{cases} \quad (3.67)$$

Navedeni rezultati pokazuju:

1. Simpsonovo pravilo poboljšanje je u odnosu na trapezno
2. Sa Simpsonovim pravilom (i drugim algoritmima integracije višeg reda) moguće je dobiti grešku koja je blizu preciznosti računala.
3. Najbolja se numerička aproksimacija ne dobiva u granici  $N \rightarrow \infty$ , već za relativno mali  $N$ .

## *Višestruki integrali*

Numeričko integriranje u slučaju višestrukih integrala teško je iz dva razloga:

1. Broj točaka u kojima treba izračunati funkciju raste s brojem dimenzija integrala  $N$  kao  $\alpha^N$ .
2. Granica integracije može biti jako komplicirana

Kada se treba provesti integracija glatke funkcije po području koje ima jednostavnu granicu, može se ponoviti  $N$ -puta jednostruka integracije, na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
I &= \iiint f(x, y, z) dx dy dz \\
&= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \\
&= \int_{x_1}^{x_2} dx H(x)
\end{aligned}$$

$H(x)$  dan je kao

$$\begin{aligned}
H(x) &= \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz = \\
&= \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy G(x, y), \\
G(x, y) &= \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz
\end{aligned}$$

Numerička implementacija ovisi o tome da li programski jezik dozvoljava rekurziju (tj. dozvoljava li da neki program zove sam sebe). Računanje integrala  $I$  uključuje pozivanje nekog potprograma za integriranje (npr. trapez) kojem je funkcija  $H$  podintegralna funkcija. Izračun funkcija  $H$  i  $G$  također uključuje pozivanje funkcije trapez. Dakle, trapez poziva  $H$  koja poziva trapez koji poziva  $G$  koja poziva trapez koji poziva  $f(x, y, z)$ .

Ako programski jezik ne dozvoljava rekurziju, tada treba napraviti tri kopije npr. trapeza, od kojih svaka ima svoje ime tako da svaki potprogram može zvati svoju verziju.

Primjeri programa dostupni su na web stranici predmeta:

[www.pmfst.hr/~leandra/mmfl/programi](http://www.pmfst.hr/~leandra/mmfl/programi).

## Dodatak A

Pretpostavlja se poznavanje osnova matričnog računa.

### Neke posebne matrice

Ime matrice	Oznaka <sup>5</sup>	Način dobivanja iz matrice A
Transponirana matrica od A ili A transponirana	$A^T$ ili $A^t$ ili $A'$ ili $\tilde{A}$	Zamijeniti stupce i retke matrice A
Kompleksno konjugirana matrica od A	$A^*$ ili $\bar{A}$	Kompleksno se konjugira svaki element matrice A
Hermitsko konjugirana matrica od A; u kvantnoj mehanici i diferencijalnim jednadžbama nekad se zove i adjungirana, ali izraz adjungirana ima drugo značenje u algebri (vidi dolje)	$A^\dagger$ ili $\bar{A}'$ ili $\tilde{A}^*$	Kompleksno se konjugira svaki element matrice A i transponira (tj. zamijene se redci i stupci)
Adjungirana matrica od A	$\hat{A}$	Svaki element treba zamijeniti njegovim kofaktorom i zatim transponirati
Recipročna ili inverzna matrica od A (A ne smije biti singularna)	$A^{-1}$	Podijeliti svaki element od $\hat{A}$ s determinantom od A

Matrica se naziva	ako zadovoljava jednadžbu
simetrična	$A=A'$ (matrica = njenoj transponiranoj matrici)
antisimetrična	$A=-A'$
realna	$A=A^*$
čisto imaginarna	$A=-A^*$
ortogonalna	$AA'=1$ , tj. $A'=A^{-1}$ (inverzna matrica = transponirana matrica)
Hermitska	$A=A^\dagger$ (matrica= njenoj hermitski konjugiranoj matrici)
unitarna	$AA^\dagger=1$ , $A^\dagger=A^{-1}$ (inverzna matrica=hermitskoj matrici)

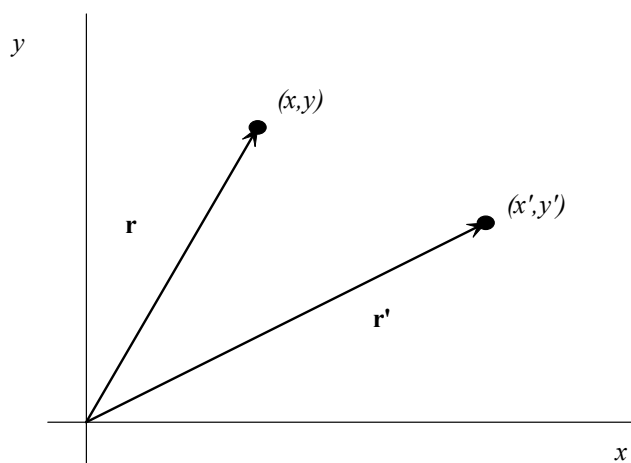
Povezat ćemo matrice, odnosno sustave linearnih jednadžbi, s linearnim i ortogonalnim transformacijama kroz neke geometrijske primjere.

Linearna je transformacija ona kod koje je svaka nova varijabla linearna kombinacija starih varijabli. U dvije dimenzije linearne jednadžbe transformacije su:

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy, \end{aligned} \quad (3.68)$$

gdje su  $a, b, c$  i  $d$  konstante. Te jednadžbe mogu se geometrijski interpretirati na dva načina.

<sup>5</sup> Navedeno je više oznaka, prva je ona koja se najčešće pojavljuje u fizici, osobito kvantnoj fizici.



Crt. 53

**Prvi način** (Crt. 53):

Neka su  $\mathbf{r}$  i  $\mathbf{r}'$  dva vektora

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j}.$$

Tada nam jednačba (3.68) kazuje kako dobiti vektor  $\mathbf{r}'$ , ako nam je dan vektor  $\mathbf{r}$ . Jednačbe (3.68) možemo napisati u matričnoj notaciji kao

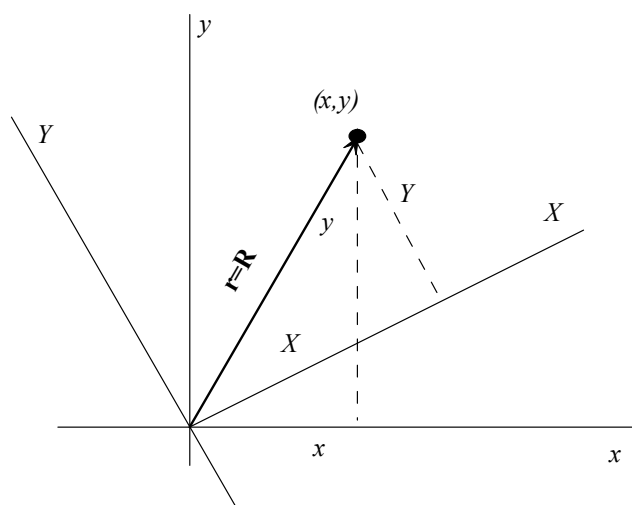
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{ili} \quad \mathbf{r}' = \mathbf{M}\mathbf{r}.$$

Matricu  $\mathbf{M}$  nazivamo matrica transformacije i ona sadrži sve informacije koje su nam potrebne za dobivanje  $\mathbf{r}'$  iz  $\mathbf{r}$ . Vidjeli smo da isti efekt ima i tenzor drugog reda.

**Drugi način** (Crt. 54):

Radi izbjegavanja moguće zabune ovdje ćemo nove varijable nazvati  $X, Y$ , umjesto  $x', y'$ . Jednačbe (3.68) postaju

$$\begin{aligned} X &= ax + by \\ Y &= cx + dy, \end{aligned} \quad (3.69)$$



Crt. 54

Ovdje razmatramo dva skupa koordinatnih osi  $(x, y)$  i  $(X, Y)$  i jedan vektor  $\mathbf{r}=\mathbf{R}$  koji ima sljedeće koordinate relativno prema svakom skupu osi:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = \mathbf{R} = X\mathbf{I} + Y\mathbf{J},$$

gdje su  $\mathbf{I}$  i  $\mathbf{J}$  jedinični vektori duž  $X$  i  $Y$  osi. U ovoj situaciji matrica transformacije  $\mathbf{M}$  nam govori kako dobiti komponente vektora  $\mathbf{r}=\mathbf{R}$  u odnosu na osi  $X$  i  $Y$ , ako znamo komponente tog vektora u odnosu na  $x$  i  $y$  os.

### **Ortogonalne transformacije**

Općenito, osi  $X$  i  $Y$  nisu ortogonalne. Kada jesu, onda su jednačbe (3.69) jednačbe rotacije, a parametri  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$  mogu se napisati preko kuta rotacije  $\theta$  pa dobivamo

$$\begin{aligned} X &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ Y &= -x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned} \quad (3.70)$$

U fizici nas često zanima upravo ovaj posebni slučaj linearnih transformacija koje se nazivaju ortogonalnim transformacijama. Po definiciji, ortogonalna transformacija je linearna transformacija iz  $x,y$  u  $X,Y$  takva da je

$$x^2 + y^2 = X^2 + Y^2,$$

odnosno na Crt. 53

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2.$$

Drugim riječima, ortogonalne transformacije ne mijenjaju duljinu vektora. Matrica  $\mathbf{M}$  ortogonalne transformacije naziva se ortogonalna matrica. Njen je inverz jednak transponiranoj matrici. Dokaz (za dvije dimenzije):

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 &= (ax + by)^2 + (cx + dy)^2 \\ &= (a^2 + c^2)x^2 + 2(ab + cd)xy + (b^2 + d^2)y^2 \Rightarrow \\ a^2 + c^2 &= 1, \quad ab + cd = 0, \quad b^2 + d^2 = 1 \end{aligned}$$

$$M^T M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kvadratna matrica bilo kojeg reda je ortogonalna ako joj je inverzna matrica jednaka transponiranoj. U dvije i tri dimenzije o ortogonalne transformacije možemo sebi predočiti kao rotacije os koordinatnog prostora. Tu geometrijsku terminologiju proširujemo i na slučajeve kad se nalazimo u prostoru koji ima više od tri dimenzije, odnosno kad imamo više od tri varijable, što je čest slučaj u fizici. Tako u problemu s  $n$  varijabli možemo reći da linearna transformacija (odnosno linearna promjena varijabli) za koju vrijedi „suma kvadrata novih varijabli = sumi kvadrata starih varijabli“ odgovara „rotaciji u  $n$ -dimenzionalnom prostoru“

### **Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori; dijagonalizacija matrica**

Promotrit ćemo jednostavnu fizikalnu interpretaciju Crt. 53 i jednačbi (3.68). Pretpostavimo da je  $(x,y)$  ravnina prekrivena elastičnom membranom koja se može rastegnuti, skupiti ili rotirati (uz nepomično ishodište). Tada bilo koja točka  $(x,y)$  na membrani nakon deformacije postaje točka  $(x',y')$  i možemo reći da matrica  $\mathbf{M}$  opisuje tu deformaciju. Zanima nas postoje li vektori kojima navedena transformacija ne mijenja smjer, odnosno za koje vrijedi  $\mathbf{r}' = \mu \mathbf{r}$ , gdje je  $\mu$  konstanta. Takvi se vektori nazivaju svojstveni vektori, a konstanta  $\mu$  se naziva svojstvena vrijednost matrice transformacije  $\mathbf{M}$ .

Svojstvene vrijednosti tražimo iz uvjeta da je  $\det(\mathbf{M} - \mu \mathbf{I}) = 0$ . Dobivena se jednačba naziva karakteristična jednačba matrice  $\mathbf{M}$ . Promotrimo to na jednom primjeru.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (3.71)$$

Uvjet za svojstvene vektore,  $\mathbf{r}' = \mu \mathbf{r}$ , u matricnoj notaciji je

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu x \\ \mu y \end{pmatrix},$$

odnosno napisano kao sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} 5x - 2y &= \mu x & \text{ili} & & (5 - \mu)x + 2y &= 0 \\ -2x + 2y &= \mu y & & & -2x + (2 - \mu)y &= 0 \end{aligned} \quad (3.72)$$

Netrivijalno rješenje (rješenje koje nije  $x=y=0$ ) postoji ako

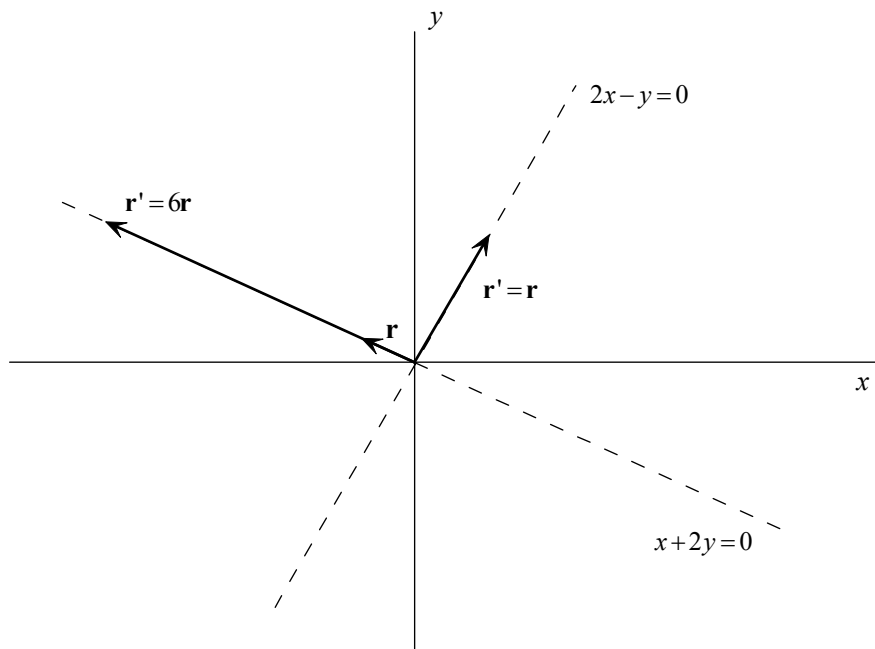
$$\begin{vmatrix} 5 - \mu & -2 \\ -2 & 2 - \mu \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \mu^2 - 7\mu + 6 = 0 \Rightarrow \mu = 1 \text{ ili } \mu = 6.$$

### Svojstveni vektori:

Ako uvrstimo  $\mu$  u sustav linearnih jednadžbi dobivamo:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 & \text{iz bilo koje od jednadžbi za } \mu &= 1 \\ x + 2y &= 0 & \text{iz bilo koje od jednadžbi za } \mu &= 6 \end{aligned} \quad (3.73)$$

Tražili smo takve vektore  $\mathbf{r} = xi + yj$  za koje će transformacija opisana matricom  $\mathbf{M}$  dati vektor  $\mathbf{r}'$  koji je paralelan vektoru  $\mathbf{r}$ . Dobili smo da *bilo koji* vektor  $\mathbf{r}$  s komponentama  $x$  i  $y$  koje zadovoljavaju jednu od jednadžbi (3.73) ima tu osobinu. Jednadžbe (3.73) predstavljaju jednadžbe pravca kroz ishodište, što znači da svojstveni vektori leže na tim pravcima (Crt. 55).



Crt. 55

Tada jednadžbe (3.73) pokazuju da se bilo koji vektor  $\mathbf{r}$  iz ishodišta do točke na pravcu  $x + 2y = 0$  mijenja u vektor istog smjera, ali šest puta veće duljine, dok se bilo koji vektor iz ishodišta do neke točke na pravcu  $2x - y = 0$  ne mijenja. Navedeni su vektori (duž  $x + 2y = 0$  i duž  $2x - y = 0$ ) svojstveni vektori transformacije. Duž ta dva smjera (i samo duž njih), deformacija elastične membrane je čisto sažimanje bez smika (bez rotacije).

### Dijagonalizacija matrice



Sada ćemo napisati sustav (3.72) jednom s  $\mu=1$ , a drugi put s  $\mu=6$ , te koristiti indekse 1 i 2 kako bismo mogli razlikovati odgovarajuće svojstvene vektore:

$$\begin{aligned} 5x_1 - 2y_1 &= x_1 & 5x_2 - 2y_2 &= 6x_2 \\ -2x_1 + 2y_1 &= y_1 & -2x_2 + 2y_2 &= 6y_2 \end{aligned} \quad (3.74)$$

Ove se četiri jednadžbe mogu napisati kao jedna matrična jednadžba, što se lako može provjeriti množenjem matrica

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Sve što možemo reći o  $(x_1, y_1)$  je da vrijedi  $2x_1 - y_1 = 0$ . Međutim, zgodno je izabrati numeričke vrijednosti komponenti tako da svojstveni vektori budu jedinični. Slijedi

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad y_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad x_2 = \frac{-2}{\sqrt{5}}, \quad y_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

pa dobivamo

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ako navedene matrice označimo slovima možemo pisati

$$\mathbf{MC} = \mathbf{CD}, \quad (3.75)$$

gdje je

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ako, kao što je ovdje slučaj, determinanta od  $\mathbf{C}$  nije jednaka nuli, tada  $\mathbf{C}$  ima inverznu matricu  $\mathbf{C}^{-1}$  pa relaciju (3.75) možemo pomnožiti s  $\mathbf{C}^{-1}$  i iskoristiti  $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{I}$ , gdje je  $\mathbf{I}$  jedinična matrica.

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{MC} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{CD} = \mathbf{D} \quad (3.76)$$

Matrica  $\mathbf{D}$  ima elemente koji su različiti od nule samo duž glavne dijagonale pa se naziva dijagonalna matrica. Kažemo i da je matrica  $\mathbf{D}$  slična matrici  $\mathbf{M}$ , i kada dobijemo  $\mathbf{D}$  iz  $\mathbf{M}$ , kažemo da smo dijagonalizirali matricu  $\mathbf{M}$  transformacijom sličnosti. Fizikalno, to samo znači da smo pojednostavnili naš problem boljim izborom varijabli. Npr. u problemu membrane, jednostavnije je opisati deformaciju ako se koriste osi duž svojstvenih vektora.

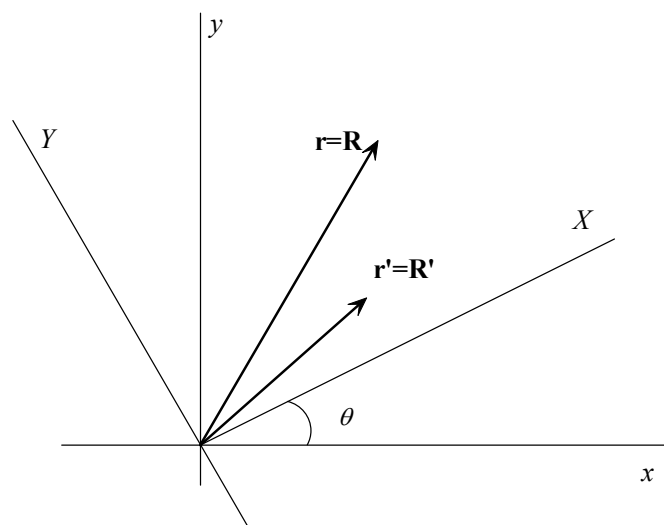
Matricu  $\mathbf{D}$  nije teško pronaći; dovoljno je riješiti karakterističnu jednadžbu od  $\mathbf{M}$ . Tada je  $\mathbf{D}$  matrica s karakterističnim vrijednostima duž dijagonale te s nulama izvan dijagonale. Može se uz nešto više posla pronaći i matrica  $\mathbf{C}$ , ali većinom nam je dovoljno poznavanje matrice  $\mathbf{D}$ . Primijetimo i da redoslijed svojstvenih vrijednosti duž glavne dijagonale nije važan jer smo mogli pisati i

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Naravno,  $\mathbf{C}$  će bit različit.

### Značenje matrica $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$

Zanima nas fizikalno značenje ovih matrica. Promotrit ćemo dva skupa osi  $(x, y)$  i  $(X, Y)$ , gdje je koordinatni sustav  $(X, Y)$  zarotiran za kut  $\theta$  u odnosu na sustav  $(x, y)$  (Crt. 56).



Crt. 56

$(x, y)$  i  $(X, Y)$  koordinate jedne točke (ili komponente jednog vektora  $\mathbf{r}=\mathbf{R}$ ) u odnosu na dva koordinatna sustava povezane su izrazima

$$\begin{aligned}x &= X \cos \theta - Y \sin \theta \\y &= X \sin \theta + Y \cos \theta\end{aligned}$$

ili u matricnoj notaciji

$$\mathbf{r}=\mathbf{C}\mathbf{R} \text{ gdje je } \mathbf{C}=\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (3.77)$$

Prethodna jednadžba vrijedi za bilo koji vektor čije su komponente dane u dva sustava. Pretpostavimo da imamo drugi vektor  $\mathbf{r}'=\mathbf{R}'$  s komponentama  $x', y'$  i  $X', Y'$ . Te su komponente vezane relacijom

$$\mathbf{r}'=\mathbf{C}\mathbf{R}'. \quad (3.78)$$

Neka je sad  $\mathbf{M}$  matrica koja opisuje deformaciju ravnine u  $(x, y)$  koordinatnom sustavu. Tada jednadžba

$$\mathbf{r}'=\mathbf{M}\mathbf{r} \quad (3.79)$$

opisuje kako vektor deformacija  $\mathbf{M}$  prebacuje vektor  $\mathbf{r}$  u vektor  $\mathbf{r}'$ , gdje su oba vektora prikazana preko svojih komponenti u  $(x, y)$  koordinatnom sustavu. Zanima nas kako ovu deformaciju možemo opisati u  $(X, Y)$  koordinatnom sustavu, odnosno koja matrica transformira vektor  $\mathbf{R}$  u vektor  $\mathbf{R}'$ . Uvrstimo (3.77) i (3.78) u (3.79) pa dobijemo  $\mathbf{C}\mathbf{R}'=\mathbf{M}\mathbf{C}\mathbf{R}$ , odnosno

$$\mathbf{R}'=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{C}\mathbf{R}. \quad (3.80)$$

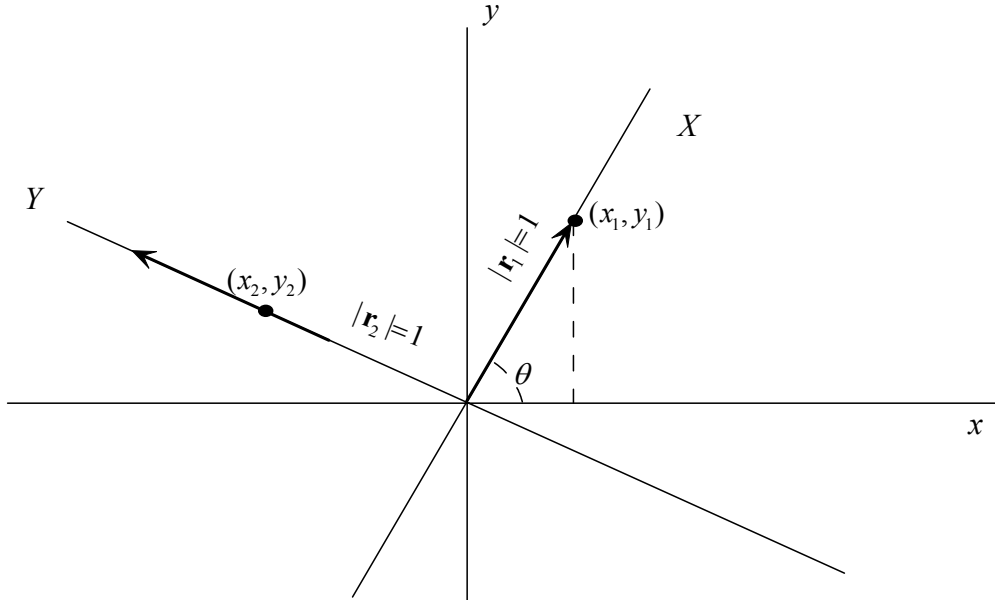
Slijedi da je  $\mathbf{D}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{C}$  matrica koja u sustavu  $(X, Y)$  opisuje istu deformaciju koju u sustavu  $(x, y)$  opisuje  $\mathbf{M}$ .

Kao sljedeće, želimo pokazati ako je matricu  $\mathbf{C}$  izaberemo tako da rezultatna matrica  $\mathbf{D}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{C}$  bude dijagonalna, tada se nove osi  $(X, Y)$  nalaze duž smjera svojstvenih vektora od  $\mathbf{M}$ . Sjetimo se iz izraza (3.76) te rasprave koja mu je prethodila da je  $\mathbf{C}$  koji dijagonalizira  $\mathbf{M}$  matrica čiji su stupci komponente jediničnih svojstvenih vektora od  $\mathbf{M}$ . Iz Crt. 57 možemo primijetiti da je matrica  $\mathbf{C}$  u izrazu (3.75) jednaka matrici rotacije  $\mathbf{C}$  u (3.77), ako su osi  $(X, Y)$  usmjerene duž svojstvenih vektora. Naime, iz Crt. 57 slijedi

$$\begin{aligned}x_1 &= |\mathbf{r}_1| \cos \theta = \cos \theta, & x_2 &= -|\mathbf{r}_2| \sin \theta = \sin \theta, \\y_1 &= |\mathbf{r}_1| \sin \theta = \sin \theta, & y_2 &= |\mathbf{r}_2| \cos \theta = \cos \theta,\end{aligned}\tag{3.81}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Novе su osi stoga duž svojstvenih vektora od  $\mathbf{M}$ .



Crt. 57

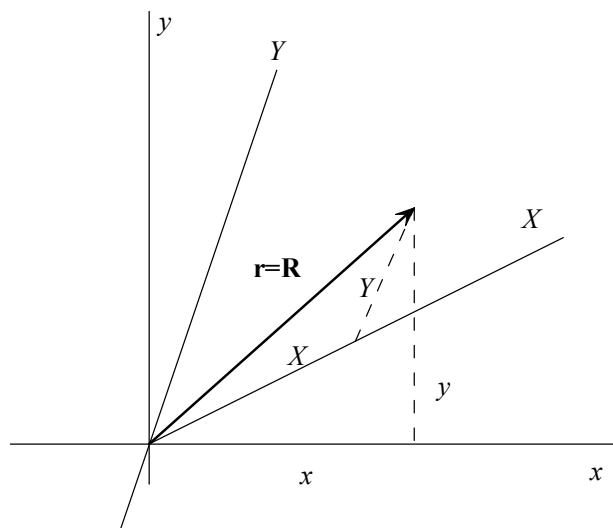
Deformacija je, relativno prema tim novim osima, opisana dijagonalnom matricom  $\mathbf{D}$ . U našem primjeru imamo

$$\mathbf{R}' = \mathbf{D}\mathbf{R} \quad \text{ili} \quad \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad \text{ili} \quad X' = X, Y' = 6Y.$$

Riječima, prethodne relacije kažu nam da je deformacija takva (u  $(X, Y)$  sustavu) da svakoj točki  $(X, Y)$  ne mijenja  $X$  koordinatu, a  $Y$  koordinatu množi sa 6. Drugim riječima, deformacija je samo rastezanje u  $Y$  smjeru. Ovo je u svakom slučaju jednostavniji opis deformacije, a ujedno i fizikalno jasniji od opisa u (3.71).

Sad vidimo i zašto nije bio važan redosljed svojstvenih vrijednosti duž dijagonale matrice  $\mathbf{D}$ . Naime, nove se osi nalaze duž svojstvenih vektora, ali nije važno koji svojstveni vektor zovemo  $X$ , a koji  $Y$ .

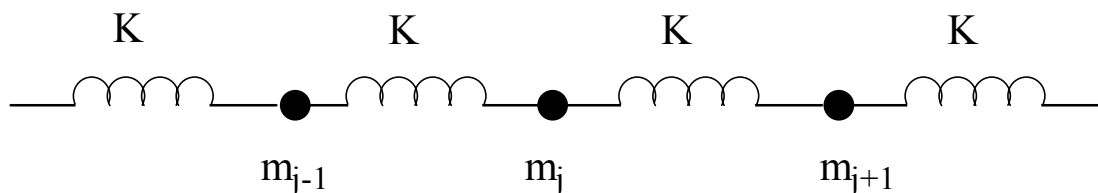
U prethodnoj raspravi nije bilo važno da  $X$  i  $Y$  osi budu okomite, iako je taj slučaj u najkorisniji. Ako je  $\mathbf{r} = \mathbf{C}\mathbf{R}$ , ali je  $\mathbf{C}$  bilo koja (nesingularna) matrica (dakle, ne nužno ortogonalna matrica rotacije kao u (3.77)), tada još uvijek vrijedi (3.80). Odnosno,  $\mathbf{D} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{C}$  opisuje deformaciju  $(X, Y)$  sustava. U ovom slučaju  $X$  i  $Y$  osi neće nužno biti okomite (Crt. 58) i  $x^2 + y^2 \neq X^2 + Y^2$ , tj. matrica  $\mathbf{C}$  nije ortogonalna.  $\mathbf{C}$  je matrica svojstvenih vektora; ako su oni međusobno okomiti (i jedinični) tada je  $\mathbf{C}$  ortogonalna matrica.



**Crt. 58**

Problemi svojstvenih vrijednosti vrlo su česti u fizici. Jedan od primjera su titranja vezanih oscilatora, koja imaju vrlo široku primjenu u akustici (titranja niti muzikalnih instrumenata, membrana, zraka u orguljama,..), mehanici i inženjerskim primjenama (titranja mehaničkih sustava, počevši od jednostavnih sustava poput njihala pa sve do mostova i aviona), elektrodinamici (radio-valovi, titranja električnih struja i napona u radio, itd.). U takvim je problemima često vrlo korisno pronaći karakteristične frekvencije i odgovarajuće normalne modove titranja. Tada se kompliciranija titranja mogu razmotriti kao linearne kombinacije jednostavnih normalnih modova titranja.

Promotrimo na primjer jednodimenzionalni sustav vezanih oscilatora koji se sastoji od  $N$  masa povezanih oprugama.



**Crt. 59** Jednodimenzionalni sustav vezanih oscilatora

Jednadžbe gibanja sustava dane su izrazima:

$$F_1 = m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -Kx_1 + K(x_2 - x_1)$$

$$F_2 = m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -K(x_2 - x_1) - K(x_2 - x_3)$$

$$\vdots$$

$$F_j = m \frac{d^2 x_j}{dt^2} = -K(x_j - x_{j-1}) - K(x_j - x_{j+1})$$

$$\vdots$$

$$F_N = m \frac{d^2 x_N}{dt^2} = -K(x_N - x_{N-1}) - Kx_N,$$

gdje su  $x_j$  pomaci  $j$ -te čestice iz ravnoteže, a radi jednostavnosti smo pretpostavili da su sve mase jednake, kao i konstante svih opruga. U slučaju normalnog moda sve čestice titraju jednakom frekvencijom pa možemo napisati  $x_j = A_j e^{i\omega t}$ ,  $j = 1, \dots, N$ , gdje je  $A_j$  amplituda

titranja čestice  $j$ . Uvrštavanjem pretpostavke u jednažbe gibanja dobivamo sustav jednažbi koji se može napisati u matričnom obliku kao

$$\frac{m\omega^2}{K} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ \dots & & & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix}, \quad (3.82)$$

odnosno

$$\frac{m\omega^2}{K} \mathbf{A} = \mathbf{D} \mathbf{A}. \quad (3.83)$$

$\mathbf{A}$  je matrica (stupčani vektor) čije su komponente amplitude titranja čestica, a  $\mathbf{D}$  je  $N \times N$  matrica u izrazu (3.82), koja se naziva i dinamička matrica sustava. Navedena matrica u ovom slučaju ima jednostavan tridijagonalan oblik.

Iz izraza (3.83) vidimo da se u ovom slučaju radi o problemu svojstvene vrijednosti. Iz teorema linearne algebre slijedi da općenito postoji  $N$  rješenja. Za svako od tih  $N$  rješenja dobije se vrijednost frekvencije  $\omega$  (svojstvena vrijednost) i njen pripadni vektor amplituda  $\mathbf{A}$  (svojstveni vektor).

## Dodatak B

<b>Naziv predmeta</b>	Matematičke metode fizike I		
<b>Kod</b>			
<b>Vrsta</b>	Teorijski s analitičkim i numeričkim vježbama		
<b>Razina</b>	Osnovni		
<b>Godina</b>	II.	<b>Semestar</b>	III.
<b>ECTS (uz odgovarajuće obrazloženje)</b>	7 ECTS: - 45+30 (predavanja + vježbe) šk.sati ~ 56 sati ~2 ECTS - oko 150 sati samostalnog rada uz konzultacije ~5 ECTS		
<b>Nastavnik</b>	Doc. dr. sc. Leandra Vranješ Markić		
<b>Kompetencije koje se stječu</b>	Sposobnost numeričkog rješavanja sustava linearnih jednadžbi i numeričkog integriranja te ispravne procjene greške. Razumijevanje fizikalne interpretacije diferencijalnih operatora. Sposobnost korištenja vektorske analize u pravokutnim i zakrivljenim koordinatama u formulaciji i rješavanju fizikalnih problema, prvenstveno iz mehanike i elektrodinamike. Osnovno znanje tenzorske analize.		
<b>Preduvjeti za upis</b>	Poznavanje diferencijalnog i integralnog računa jedne varijable, osnove programiranja.		
<b>Sadržaj</b>	Numeričko rješavanje sustava linearnih jednadžbi. Gauss-Jordanova eliminacija. Interpolacija i ekstrapolacija. Numeričko rješavanje jednodimenzionalnih integrala. Vektorska analiza. Gradijent. Divergencija. Rotacija. Vektorska integracija. Gaussov teorem. Stokesov teorem. Gaussov zakon i Poissonova jednadžba. Diracova delta funkcija. Vektorska analiza u zakrivljenim koordinatnim sustavima. Kružne cilindrične koordinate. Ortogonalne koordinate. Diferencijalni vektorski operatori. Sferične polarne koordinate. Numeričko rješavanje višedimenzionalnih integrala. Uvod u tenzorsku analizu. Kontrakcija i direktni produkt. Pravilo kvocijenta.		
<b>Preporučena literatura</b>	1. H. J. Weber , G. B. Arfken, G. Arfken, Essential Mathematical Methods for Physicists, Academic Press, 2003. 2. L. Vranješ, Matematičke metode fizike, Interna skripta		
<b>Dopunska literatura</b>	1. K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence, Mathematical methods for physics and engineering 2. Numerical Recipes in C and FORTRAN, The Art of Scientific Computing, Press, Teukolsky, Vetterling and Flannery, (Cambridge University Press, 1993)		
<b>Oblici provođenja nastave</b>	Frontalna predavanja uz pomoć interaktivnih simulacija i računalnih primjera te rješavanje zadataka analitički i uz pomoć računala.		
<b>Način provjere znanja i polaganja ispita</b>	Usmeni i pismeni		
<b>Jezik poduke i mogućnosti praćenja na drugim jezicima</b>	Hrvatski, moguće praćenje na engleskom		
<b>Način praćenja kvalitete i uspješnosti izvedbe svakog predmeta i /ili modula</b>	Ankete studenata		

## Literatura

1. H. J. Weber , G. B. Arfken, G. Arfken, Essential Mathematical Methods for Physicists, Academic Press, 2003.
2. K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence, Mathematical methods for physics and engineering, Cambridge University Press
3. Mary L. Boas, Mathematical Methods for the Physical Sciences, John Wiley&Sons, Inc., 1966.
4. R. Snieder, A Guided Tour od Mathematical Methods for the Physical Sciences, Cambridge University Press, 2001.
5. Š. Ungar, Matematička analiza III, Matematički odjel PMF-a, Zagreb 1994.
6. Rubin H. Landau, Manuel J. Paez, Computational Physics: Problem Solving with computers, Wiley-Interscience, 1997.
7. Nicolas J. Giordano, Hisao Nakanishi, Computational Physics, Pearson Education, 2006.
8. Numerical Recipes in C and FORTRAN, The Art of Scientific Computing, Press, Teukolsky, Vetterling and Flannery, (Cambridge University Press, 1993)